ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 10 MARS 1947.

PRÉSIDENCE DE M. Louis BLARINGHEM.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** souhaite la bienvenue à M. **Félix Ehrenhaft**, Professeur à l'Université de Vienne, qui assiste à la séance.

CINÉMATIQUE. — *Sur les joints homocinétiques*. Note de M. **Jules Haag**.

1. Étant donnés deux axes quelconques Δ et Δ', il existe une infinité de manières de les accoupler par un joint *homocinétique*, c'est-à-dire réalisant la même vitesse autour de ces deux axes. Dans certaines machines, par exemple les machines à tailler les engrenages, l'un des axes Δ est fixe; mais, l'autre Δ' se déplace légèrement. Il s'ensuit que les angles de rotation θ et θ' autour de Δ et Δ' ne sont pas constamment égaux, ce qui peut avoir des inconvénients d'ordre technique. Il peut donc être utile de connaître la *variation de la différence* $\varepsilon = \theta - \theta'$ *pendant un tour complet* autour de Δ' (¹).

2. Considérons d'abord deux axes orientés Δ et Δ', se rencontrant en O et faisant l'angle aigu α. Accouplons-les par un *joint de Cardan*. Soient OX le bras du croisillon qui est perpendiculaire à Δ et OY celui qui est perpendiculaire à Δ'. Appelons θ l'angle du plan $\Delta O \Delta'$ avec le plan ΔOX, compté positivement autour de Δ; soit θ' l'angle de $\Delta' O \Delta$ avec $\Delta' OY$, compté positivement autour de Δ'. Un calcul élémentaire (²) donne la relation

$$\tan\theta \tan\theta' = -\cos\alpha. \tag{1}$$

3. Supposons maintenant les axes Δ et Δ' quelconques et considérons un axe intermédiaire Δ'', qui les rencontre en O et O', sous les angles aigus α et α'.

(¹) Ce problème technique a été posé récemment par M. Burth au Centre technique d'études horlogères, à propos précisément d'une machine à tailler. M. Langue a été chargé de le résoudre numériquement, avec l'aide de mes conseils théoriques. C'est ce qui m'a conduit à la présente étude.

(²) En différentiant logarithmiquement, on retrouve immédiatement la relation bien connue $d\theta'/d\theta = \cos\lambda/\cos\lambda'$, où λ et λ' désignent les angles de Δ et Δ' avec la perpendiculaire au plan XOY.

Accouplons Δ'' à Δ par un *joint de Cardan*; soient OX et OY les bras respectivement perpendiculaires à Δ'' et à Δ. Accouplons de même Δ'' à Δ' par un autre joint, dont les bras $O'X'$ et $O'Y'$ sont respectivement perpendiculaires à Δ'' et à Δ'. Posons

$$\widehat{\Delta'' OX},\ \widehat{\Delta'' O' X'} = \beta, \qquad \widehat{\Delta'' O \Delta},\ \widehat{\Delta'' O' \Delta'} = \gamma,$$

ces angles étant mesurés algébriquement autour de Δ''. Posons encore

$$\widehat{\Delta O \Delta''},\ \widehat{\Delta O Y} = \theta, \quad \widehat{\Delta'' O \Delta},\ \widehat{\Delta'' O X} = \theta'', \quad \widehat{\Delta' O' \Delta''},\ \widehat{\Delta' O' Y'} = \theta', \quad \widehat{\Delta'' O' \Delta'},\ \widehat{\Delta'' O' X'} = \theta'''.$$

On a $\theta'' = \theta''' + \delta$, avec $\delta = \gamma - \beta$. En appliquant successivement la formule (1) aux deux joints, puis éliminant θ'' et θ''', on obtient

$$\frac{\operatorname{tang}\theta' + \operatorname{tang}\varepsilon}{1 - \operatorname{tang}\theta' \operatorname{tang}\varepsilon} = \cos\alpha \frac{\operatorname{tang}\theta' + \operatorname{tang}\delta \cos\alpha'}{\cos\alpha' - \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang}\theta'}. \tag{2}$$

Pour que le double joint soit *homocinétique*, il faut et il suffit que ε soit constant. En écrivant que les deux fonctions homographiques en $\operatorname{tang}\theta'$ ci-dessus ont même pôle et même zéro, on obtient les deux solutions $\delta = 0$ et $\delta = \pi/2$. La seconde exige $\cos\alpha \cos\alpha' = 1$; elle est à rejeter. La deuxième exige $\cos\alpha = \cos\alpha'$, donc $\alpha = \alpha'$. Ceci nous donne une *infinité de joints homocinétiques permettant d'accoupler deux axes quelconques de l'espace* [3]. Dans le cas particulier où Δ et Δ' sont parallèles ou concourants, on retrouve le *joint de Hooke*, fréquemment utilisé dans l'industrie.

4. Supposons maintenant que les conditions $\gamma = \beta$ et $\alpha' = \alpha$ ne soient *réalisées qu'approximativement*. L'angle ε n'est plus rigoureusement constant; il s'agit d'étudier sa variation quand θ' croît de 0 à 2π.

Posons $\gamma - \beta = x$, $\alpha' - \alpha = y$ et supposons x et y très petits. L'équation (2) s'écrit, au second ordre près en x, y :

$$2\varepsilon = x\frac{1 + \cos^2\alpha}{\cos\alpha} + \operatorname{tang}\alpha\,(y \sin 2\theta' - x \sin\alpha \cos 2\theta'). \tag{3}$$

L'erreur ε comprend un *terme constant* proportionnel à x et un *terme sinusoïdal*, dont la période est un demi-tour et dont l'amplitude est

$$R = \frac{1}{2} \operatorname{tang}\alpha \sqrt{y^2 + x^2 \sin^2\alpha}. \tag{4}$$

Pour rendre minimum l'oscillation de ε, il y a intérêt à *prendre Δ'' parallèle à l'une des bissectrices des directions Δ et Δ'*, comme dans le joint de Hooke. Si l'angle des deux axes est petit et si le rapport x/y n'est pas très grand, on a approximativement $R = (y/2) \operatorname{tang}\alpha$.

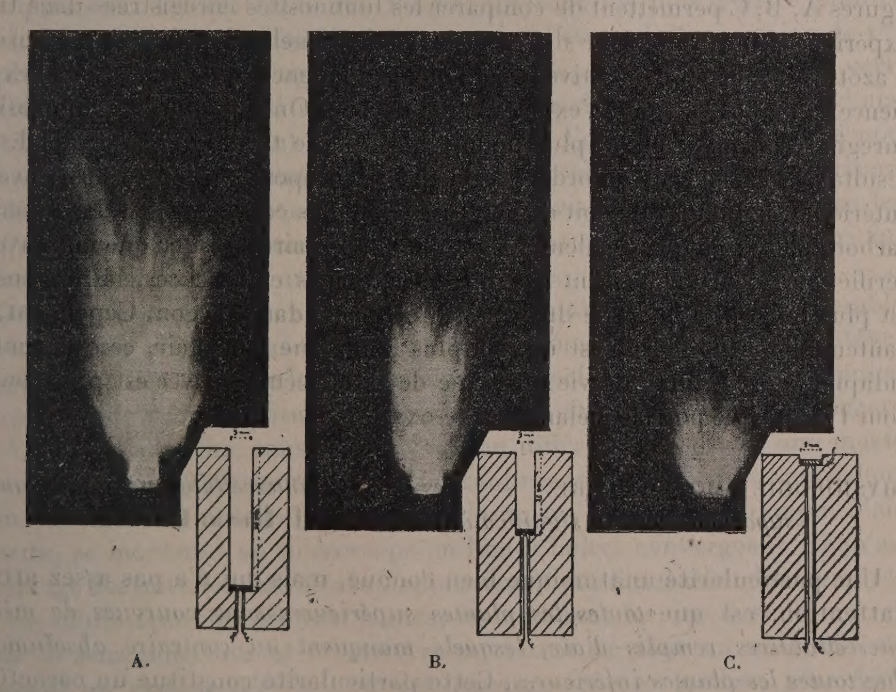
---

[3] J'ignore si cette solution générale est connue. Je l'ai donnée pour la première fois comme exercice, en 1940, aux étudiants suivant mon cours de Mécanique rationnelle.

Des formules ci-dessus, on peut déduire des applications variées. Par exemple, on peut calculer les irrégularités de taillage d'un engrenage. On peut aussi évaluer les couples de torsion supportés par les arbres Δ et Δ', dans le cas d'une automobile à traction avant.

MICROPYROTECHNIE. — *Sur l'origine des luminosités qui accompagnent le tir des explosifs en trous de mine sans bourrage.* Note [1] de MM. **Albert Michel-Levy** et **Henri Muraour**.

Beyling, dans une série d'expériences exécutées entre les deux guerres au laboratoire de Derne, a montré que si l'on effectue des tirs sans bourrage dans des trous de mine d'égale profondeur, en augmentant progressivement le nombre des cartouches (l'amorce étant toujours placée au fond du trou de mine) les luminosités enregistrées photographiquement à la sortie du trou (axe de l'appareil photographique perpendiculaire à l'axe du trou de mine) sont d'autant plus intenses que le nombre de cartouches est plus petit, le maximum de luminosité étant observé avec une cartouche. Pour expliquer ce résultat à première vue paradoxal, l'un de nous a formulé l'hypothèse suivante [2]:



A. B. C.

Les luminosités observées ont pour origine principale, non les gaz produits

(1) Séance du 24 février 1947.

(2) Henri Muraour, *Mémorial de l'Artillerie française,* fasc. 1, 1946, p. 141.

par la décomposition de l'explosif, mais l'air contenu dans le trou de mine. Cet air, rendu lumineux par le passage de l'onde de choc, conserve cette luminosité pendant un temps appréciable après le passage de l'onde. C'est cet air *activé* qui, projeté en dehors du trou de mine, impressionne la plaque photographique.

Nous avons cherché à vérifier cette hypothèse par des expériences exécutées au laboratoire. Nous avons opéré avec un explosif, l'azoture de plomb, qui ne donne pas naissance en se décomposant à des gaz combustibles. Cet explosif a été utilisé sous forme de pastilles comprimées à 10080 kg/cm² et ayant les dimensions suivantes : diamètre : 9^{mm} ; épaisseur : $1^{mm},9$; poids : $0^{g},4$.

Chaque expérience a été exécutée en introduisant une pastille au fond d'un trou cylindrique dont le diamètre n'était que très légèrement supérieur à 9^{mm}, percé dans l'axe d'un cylindre de laiton de 4^{cm} de diamètre. La détonation était provoquée à l'aide d'un fil placé au fond de la cavité et porté au rouge par un courant électrique. L'expérience était exécutée dans l'obscurité devant l'objectif non diaphragmé d'un appareil photographique. Pour rendre les résultats absolument comparables, on a utilisé les plaques d'une même boîte qui ont été développées pendant le même temps et dans le même bain. Les figures A, B, C permettent de comparer les luminosités enregistrées dans trois expériences, la profondeur du trou au fond duquel était placé le comprimé d'azoture ayant été respectivement, pour l'expérience A de 70^{mm}, pour l'expérience B de 35^{mm} et pour l'expérience C de 5^{mm}. On voit que les luminosités enregistrées sont d'autant plus importantes que le trou est plus profond. Ce résultat est en parfait accord avec la théorie proposée. D'après nos travaux antérieurs, la luminosité doit disparaître à peu près complètement dans l'acide carbonique, gaz à forte chaleur spécifique moléculaire, c'est ce que nous avons vérifié. En accord également avec nos précédentes expériences, la luminosité est plus intense, à la sortie du trou, si l'on opère dans l'argon. Cependant, la hauteur de la luminosité est un peu plus faible que dans l'air, ce qui semble indiquer que la durée de vie moyenne de la molécule activée est plus courte pour l'argon que pour le mélange azote-oxygène.

PHYSIOLOGIE MOLÉCULAIRE. — *Les méats intercellulaires des plantes supérieures et leur signification.* Note de M. **Henri Devaux**.

Une particularité anatomique bien connue, mais qui n'a pas assez attiré l'attention, est que *toutes les plantes supérieures sont pourvues de méats intercellulaires remplis d'air, lesquels manquent au contraire absolument chez toutes les plantes inférieures.* Cette particularité constitue un caractère différentiel absolu entre les deux grandes catégories du règne végétal et la limite entre les deux est extrêmement précise.

Cette limite apparaît brusquement, en effet, à l'intérieur de la classe

des Mousses, au milieu de leur développement. La première génération de ces végétaux, dite haploïde, possède des tiges et des feuilles, mais elle n'a pas de racines ni de vaisseaux proprement dits et les méats aérifères y manquent aussi totalement. Dans la deuxième génération, la génération diploïde, qui vit en parasite sur la première et est dépourvue de tiges et de feuilles, il existe au contraire des méats, des lacunes et même des stomates, c'est-à-dire un système aérifère aussi complet que celui de n'importe quelle plante supérieure. Ce fait remarquable démontre que la naissance même des méats et du système aérifère est en relation, non avec la différenciation du corps en membres et en vaisseaux, mais avec la constitution intime des cellules, celle du protoplasma lui-même.

Or c'est la génération diploïde qui, chez les Cryptogames vasculaires et chez les Phanérogames, prend un grand développement végétatif avec, non seulement un système aérifère bien constitué, mais aussi des membres à fonctions spécialisées : la racine, membre absorbant; la tige, membre conducteur; la feuille, membre assimilateur et transpirateur. Eh bien ! ici encore l'existence des membres et des vaisseaux n'est pas absolument générale, car ces formations peuvent manquer totalement dans quelques cas. Tel est celui des *Volfia*, qui sont les plus petites plantes phanérogames connues, dont le corps entier, à l'état adulte, a moins de 1^{mm} de diamètre, corps sans tige ni feuille ni racine, réduit à un globule vert, flottant sur l'eau, et qui néanmoins est très riche en méats pleins d'air.

Ailleurs et spécialement chez les Orchidées, l'œuf donne naissance non à une plantule normale, mais à une masse tuberculeuse sur laquelle naissent tardivement des bourgeons et des racines, mais qui possède, comme les *Volfia*, un puissant système aérifère, témoignant que cette masse embryonnaire représente encore une plante supérieure.

Or une constatation du même ordre est présentée par l'immense ensemble de toutes les plantes vasculaires quand on considère leur premier développement. Dans un embryon ou dans un point végétatif quelconque, les parties devant constituer la racine, la tige et la feuille ne sont encore qu'à l'état d'ébauche, sans aucun vaisseau différencié; tout est une masse méristématique en cloisonnement. Pourtant ces très jeunes tissus possèdent déjà un système intercellulaire abondamment développé, rempli d'air gazeux, se montrant au microscope en lignes noires convergeant jusqu'au voisinage des initiales. Les méats y apparaissent par fissuration des membres pecto-cellulosiques encore très jeunes; ils confluent les uns avec les autres dans le sens longitudinal et arrivent à constituer tout un ensemble de canaux, *un système aérifère complet, montrant que ce système, plus hâtif que tout autre système de l'organisme végétal, est contemporain de la formation même des tissus* [1]. Dans ce système, l'apparition de l'air gazeux est conco-

---

[1] *Ann. Sc. Nat. Bot.*, 14, 1891 et *P. V. Soc. Linnéenne de Bordeaux*, mars 1903.

mitante de la séparation des cellules, séparation qui s'effectue au milieu de la lamelle moyenne. Ceci a lieu même chez les plantes aquatiques complètement submergées, par une sorte de démouillage des parois en décollement et apparition d'air gazeux au lieu d'un liquide aqueux, tel que celui qui apparaît dans d'autres cas de délamination (cellules de la coiffe, cellules du tissu conducteur du style, etc.).

Au contraire, dans un point végétatif de *Fucus* ou d'algue à tissus massifs, les cellules sont plongées dans une gelée générale; il n'apparaît dans leurs méristèmes aucun espace intercellulaire rempli d'air. Les ampoules aérifères bien connues du *Fucus vesiculosus* et de quelques autres algues sont des formations très différentes des méats des plantes supérieures, à la fois par leur tardivité et par leur étroite localisation. Nous sommes ainsi mis en présence d'un caractère de supériorité, antérieur à tous les autres, plus général en particulier que l'existence de membres, racines, tiges et feuilles ou de systèmes internes tels que les vaisseaux. Ce caractère devrait être de minime importance puisqu'il n'intéresse que les tissus. Et cependant sa grande généralité, le fait que cette généralité est absolue, qu'il apparaît très hâtivement et qu'il persiste intact dans les cas où les autres caractères de supériorité n'existent plus (*Volfia*, embryons d'Orchidées), nous forcent à l'admettre, au contraire, comme plus fondamental que nous ne serions portés à le penser. Nous devons dès lors nous demander d'où vient cette importance.

Elle réside, évidemment, dans les rapports d'adhérence des cellules entre elles et, secondairement, de mouillabilité des surfaces quand cette adhérence disparaît par fissuration des lamelles mitoyennes. Partout où se produisent des méats, l'adhérence se présente au minimum et devient même négative puisque le clivage apparaît. Or, c'est au même moment qu'apparaît aussi l'air gazeux. Le clivage aurait pu être accompagné d'une sécrétion aqueuse, mais cela n'a presque jamais lieu. Il est au contraire accompagné d'un démouillage, c'est-à-dire non seulement d'une disparition complète des adhérences, mais d'une absence d'affinités même pour l'eau.

C'est en effet un des caractères les plus remarquables des parois des méats aérifères d'être douées d'une immouillabilité extraordinaire, mieux marquée et plus constante que celle qui existe, à l'extérieur du corps, pour l'épiderme de la tige ou de la feuille, et encore plus pour la racine dont la mouillabilité extérieure est au contraire nettement positive. On en a la preuve, du reste, en sectionnant sous l'eau une tige ou une racine d'un *Elodea* ou de toute autre plante supérieure aquatique : les espaces capillaires y restent remplis d'air gazeux, l'eau refuse absolument d'y pénétrer. Les régions des parois cellulaires tapissant les méats sont donc fortement hydrofuges et cela est d'autant plus frappant que les autres

régions de ces mêmes parois, celles qui sont contiguës à d'autres cellules, sont au contraire douées d'une forte adhérence les unes pour les autres, ce qui maintient la continuité des tissus de la plante. Cette dernière remarque est fondamentale. Elle souligne le fait qu'il existe autour des cellules des plantes supérieures, sur la limite extérieure des parois de chaque cellule, des affinités d'adhérence, les unes très fortes, les autres très faibles, et *c'est dans l'existence simultanée de ces affinités opposées que nous devons chercher la cause profonde de la supériorité de ces plantes.* Mais l'origine première de cette hétéro-affinité ne peut exister dans la membrane elle-même. Elle est dans ce qui a procédé à la formation de cette membrane, c'est-à-dire dans le protoplasma qui produit les matériaux et les organise suivant ses propres affinités.

Nous retrouvons ici le principe établi autrefois par Henri Milnes-Edwards, d'après lequel la supériorité des organismes réside dans leur organisation différentielle, mais nous remontons à l'origine de cette supériorité : une forte hétéropolarité des molécules vivantes..

Il est intéressant, pour terminer ces aperçus, de rappeler comment l'étude des Mousses et spécialement de la *Funaria hygrometrica* permet de rapporter à la fécondation, c'est-à-dire à la production, par conjugaison, de noyaux diploïdiques dans les cellules, l'apparition de l'hétéropolarité du protoplasma avec toutes ses conséquences [2].

SÉISMOLOGIE. — *La séismicité de Madagascar.*
Note de M. **Charles Poisson**.

Depuis 1927 nous disposons des enregistrements microséismiques des deux séismographes Mainka que l'Académie a bien voulu confier au Directeur de l'Observatoire de Tananarive. Leur fonctionnement a été régulier et sans interruption notable. Au point de vue macroséismique, les enquêtes sont effectuées conformément aux instructions données par le Bureau Central Séismologique français de Strasbourg, et les réponses aux questionnaires sont centralisées à l'Observatoire.

Pendant la période de vingt années consécutives, 1927-1946, nous avons reçu une documentation portant sur 267 secousses différentes, dout 12 avaient atteint ou dépassé légèrement l'intensité correspondant au degré VI de l'échelle internationale. Aucun tremblement de terre atteignant le degré VIII ne s'est produit à l'intérieur de Madagascar. Celui du 29 mars 1943, suivi de quelques répliques plus faibles, a probablement dépassé ce degré, mais l'épicentre se trouvait en mer, sur le canal de Mozambique, vers 19° de latitude Sud et 44° de longitude Est.

---

[2] *Comptes rendus*, 208, 1939, pp. 1260-1263. Il existe des prothalles à cellules munies de noyaux diploïdes qui sont pourtant sans méats. Ceci montre que la diploïdie produite par la fécondation entraîne un changement plus profond.

Pour un territoire dont la superficie est évaluée à 592000 kilomètres carrés (archipel des Comores compris), le nombre de 267 secousses séismisques en vingt ans est très faible. Il correspond à peine à 2,2 secousses par an et par 100000 kilomètres carrés. Si l'on veut tenir compte du fait que le réseau des stations météorologiques qui fournissent les réponses les plus nombreuses aux enquêtes, avait avant 1935 une densité insuffisante, les totaux des années 1935 à 1946 se rapprocheraient davantage de la vérité. Pendant cette période, 214 secousses furent senties, soit 3 par an et par 100000 kilomètres carrés.

Mais cette appréciation globale ne suffit pas. Un carré de 310^{km} de côté, comprenant la capitale, et s'étendant en latitude du lac Alaotra au massif de l'Ankaratra, de la côte Est de Madagascar à la bordure Ouest de la province malgache du Valalafotsy, fournit 62 % des secousses connues.

Parmi les autres territoires séismiques, l'archipel des Comores a signalé 25 secousses en 20 ans, et l'Extrême-Sud 21. Aucun tremblement de terre local n'a son épicentre sur les terrains sédimentaires de l'Ouest ou du Sud-Ouest. Dans ces terrains, un seul accident tectonique (failles parallèles de la région d'Analalava, estuaire submergé de la rivière Loza), s'est montré faiblement actif.

Toutes nos secousses séismiques ont leur origine dans le vieux socle gneissique qui comprend environ les deux tiers de la superficie de l'île de Madagascar. Ce socle est entièrement plissé.

Il a été possible dans la majorité des cas de rapporter ces tremblements de terre à des accidents tectoniques reconnus par les géologues. Le plus remarquable et le plus actif est le fossé effondré entre failles parallèles longitudinales qui renferme les dépressions lacustres d'Andilamena, du lac Alaotra, de la haute vallée du Mangoro.

La région du lac Itasy, qui fut célèbre à Madagascar par son activité séismique pendant les années 1897-1899, n'a signalé que 33 secousses au cours des vingt dernières années.

Le nombre des petits chocs d'origine malgache enregistrés par les séismographes Mainka est en moyenne 6 à 8 fois plus grand que celui des secousses perceptibles aux sens.

Somme toute la séismicité de Madagascar paraît être actuellement un peu inférieure à celle de la France métropolitaine.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Action de quelques substances de croissance sur la germination et la productivité des graines du* Pisum sativum. Note (1) de M. **Paul Becquerel** et Mlle **Jacqueline Rousseau**.

De nombreuses observations ont déjà été publiées sur le rôle de certaines substances de croissance, sur la croissance des tissus, la formation de certaines

(1) Séance du 3 mars 1947.

tumeurs, la production des radicelles, l'allongement ou l'épaississement de la tige, la caryocinèse et les mutations, mais nous ne connaissons que très peu de recherches sur le trempage des graines dans leurs solutions aux dilutions les plus favorables pour la germination et la productivité de leurs graines.

Nos expériences ont seulement porté sur l'acide phénylacétique, l'acide indol-β-acétique et la colchicine aux dilutions dans l'eau au 1/10000 et au 1/100000. La durée de trempage était de 24 heures et de 48 heures. Les graines essayées étaient celles du *Pisum sativum* variété Lincoln. Ces graines étaient lavées soigneusement à l'alcool à 90° puis à l'eau distillée stérilisée; nous les mettions ensuite à tremper dans les solutions précitées stérilisées, puis après un nouveau lavage de quelques minutes à l'eau distillée, nous les faisions germer sur du coton hydrophile aseptique imbibé d'eau distillée stérilisée dans des boîtes de Pétri, placées dans une étuve dans les mêmes conditions de température et d'éclairement. Des lots témoins de graines trempées seulement dans de l'eau distillée pendant la même durée et soumises aux mêmes conditions permettaient de faire la comparaison.

Le tableau ci-dessous mentionne, après trempage de 24 heures (A) et de 48 heures (B) dans les deux dilutions 10^{-4} et 10^{-5} pour chaque substance, le pourcentage de graines germées au bout de deux jours, quatre jours, six jours et douze jours.

	Pourcentage de graines germées au bout de							
	2 jours.		4 jours.		6 jours.		12 jours.	
Substances utilisées et dilutions.	A.	B.	A.	B.	A.	B.	A.	B.
Acide phénylacétique 10^{-5}	92	32	97	62	97	66	98	82
» » 10^{-4}	46	6	60	10	70	22	86	74
Acide indol-β acétique 10^{-5}	78	20	80	28	84	36	94	66
» » 10^{-4}	8	0	18	6	24	10	72	44
Colchicine 10^{-5}	94	80	96	84	100	92	100	94
» 10^{-4}	72	70	80	78	90	80	92	84
Graines témoins dans l'eau distillée	98	96	98	96	100	96	100	98

Trempage : A, 24 heures; B, 48 heures.

Nous constatons alors que le trempage pendant 24 heures dans les solutions précitées à la dilution de 10^{-5} a une action faiblement retardatrice et légèrement toxique.

L'acide β-acétique à cette dose au bout de 24 heures de trempage a un effet retardateur marqué, puisque le 2ᵉ jour ne germent que 78 % des graines, alors que le 12ᵉ jour nous en avons 94 %.

Aux doses de 10^{-4} pendant la même durée de trempage, l'effet retardateur et l'effet toxique sont beaucoup plus grands, puisque dans l'acide phénylacétique, le 2ᵉ jour, ne germent que 46 % des graines et le 12ᵉ jour 86 %. Pour l'indol-β-acétique, le 2ᵉ jour 8 % et le 12ᵉ jour 72 %. Pour la colchicine, 72 % le 2ᵉ jour, et 92 % le 12ᵉ jour. L'augmentation de la durée de trempage portée

à 48 heures, a accentué l'effet retardateur et l'effet toxique sur la germination, aussi bien dans les expériences aux faibles doses de 10^{-5} qu'aux fortes doses de 10^{-4}. C'est l'acide indol-β-acétique qui, à cette dose, s'est révélé le plus toxique, puisque au bout de 12 jours n'ont germé que 44 % des graines.

Connaissant ainsi l'activité de ces substances sur la germination aux doses indiquées, il était important de savoir comment les graines ayant subi une durée de trempage peu toxique (par conséquent 24 heures) se comporteraient sur le terrain et si elles donneraient une meilleure récolte que les graines témoins.

Ces graines furent semées en ligne le 1er avril 1946 sur le terrain de notre station de Biologie végétale de Beau-Site, dans les mêmes conditions de fumure et d'éclairement. La floraison eut lieu le 8 juin et la récolte le 24 juillet. Dans chaque ligne nous avons recueilli, pour vingt pieds consécutifs, toutes les gousses puis les graines dont nous avons comparé le poids sec avec celui correspondant aux pieds témoins.

Le tableau ci-dessous nous en présente les résultats.

Substances utilisées et dilutions.	Nombre de gousses pour 20 pieds.	Nombre de graines.	Poids sec de grains (g).
Acide phénylacétique 10^{-5}	90	520	105
» 10^{-4}	80	425	75
Acide indol-β acétique 10^{-5}	80	490	95
» 10^{-4}	73	424	81
Colchicine 10^{-5}	74	455	80
» 10^{-4}	71	413	74
Graines témoins	76	424	80

L'acide phénylacétique à la dilution de 10^{-5} augmente très nettement le nombre des gousses, le nombre de graines, et leur poids sec de 30 %. L'acide indol-β-acétique à 10^{-5} augmente aussi le nombre de gousses, le nombre de graines et leur poids sec de 18 %. Par contre ces deux substances à la dose de 10^{-4} n'ont qu'une activité défavorable très faible. Quant à la colchicine, aux doses indiquées, elle est sans action sur le rendement.

Ces résultats n'en sont pas moins intéressants, car ils démontrent que le trempage des graines de Pois, 24 heures dans l'acide phénylacétique et dans l'acide indol-β-acétique à la dilution au 1/100000 favorisent leur productivité.

Ces substances, additionnées de substances oligodynamiques, auront-elles encore un effet plus marqué? C'est ce que nous verrons dans la prochaine Note.

M. **Emmanuel de Margerie** s'exprime en ces termes :

Ayant eu l'honneur de prendre la succession de notre Confrère, le Général R. Bourgeois, comme Président du Comité National de Géographie, je suis

heureux de présenter à l'Académie, complètement terminé, l'*Atlas de France* (¹), dont l'exécution avait été confiée dès 1921 à une Commission spéciale.

A plusieurs reprises, et en tant que Président moi-même de cette Commission, j'ai déjà mis sous les yeux de l'Académie quelques spécimens des planches établies tout exprès, en particulier la belle *Carte morphologique* due à M. de Martonne, celle de la *Densité de la Population* préparée par les soins de feu Albert Demangeon, et la Carte du *Tapis végétal* dressée par M. Henri Gaussen. Grâce aux efforts de nombreux Collaborateurs, largement secondés tant sous le rapport financier qu'au point de vue technique par les Pouvoirs publics, cette vaste enquête a pu être conduite à son terme, en dépit de difficultés de tout genre, que la Guerre mondiale n'avait fait qu'augmenter au cours de ces dernières années; ce résultat est dû principalement à l'énergie et à la haute compétence du secrétaire de la Commission, notre Confrère M. de Martonne, et à l'empressement de la *Société Française de Cartographie*, fondée par M. Jean Majorelle et dirigée par M. André Libault, qui en a assuré l'exécution matérielle.

Le prix de revient total de l'*Atlas de France* a dépassé trois millions de francs.

Je rappelle qu'il s'agissait pour nous, non pas d'ajouter un Recueil de plus aux Atlas généraux que le public avait à sa disposition, comme le célèbre *Atlas de Stieler* ou celui de Schrader-Vivien de Saint-Martin, mais uniquement de réunir une série d'images du Territoire Français représentant tous les aspects de sa condition physique actuelle et la distribution des ressources humaines, industrielles et agricoles qui font la richesse de son sous-sol, de son sol et de sa population.

Depuis un demi-siècle, la plupart des Nations du Monde ont senti le même besoin de posséder un inventaire graphique des facteurs de leur puissance respective, et nombreux sont déjà, à l'étranger, les Atlas provoqués par des préoccupations analogues. A cet égard, il convient de saluer, comme une réussite particulièrement brillante, l'*Atlante fisico-economico d'Italia*, du Professeur Giotto Dainelli. Nous espérons que notre œuvre ne sera pas jugée inférieure à celles qui l'ont précédée dans le même esprit.

Il est dans la nature des choses que, dans le domaine statistique et démographique surtout, les valeurs changent rapidement; aussi plusieurs des feuilles de l'*Atlas* sont-elles en état de refonte perpétuelle, afin que la situation économique soit constamment tenue à jour. Tel qu'il est aujourd'hui, l'*Atlas de France* représente un tableau complet de l'état de notre pays aux environs de l'année 1940.

(¹) *Atlas de France*. Paris, Éditions géographiques de France. In-folio, 82 planches ($0^m,64 \times 0^m,50$), plus 1 feuille double contenant Titre, Préface, Table des planches et Index analytique.

DÉSIGNATIONS.

M. **Armand de Gramont** est désigné pour représenter l'Académie à l'inauguration du monument érigé en l'honneur de **Condorcet**, à Ribemont, le dimanche 27 avril 1947.

CORRESPONDANCE.

Le **Conseil National des Recherches Italien** invite l'Académie à se faire représenter au *Congrès international pour le Cinquantenaire de la découverte marconienne de la Radio*, qui aura lieu à Rome, du 28 septembre au 5 octobre 1947.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Paul Bertrand. *Les Végétaux vasculaires. Introduction à l'étude de l'anatomie comparée, suivie de Notes originales.* Préface de M. Louis Emberger (présenté par M. Blaringhem).

2° Roberto Agramonte. *Don Jose de La Luz y la filosofia como ciencia de la realidad.*

3° Elias Entralgo. *La paradoja historica de Luz Caballero.*

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur l'approximation des fonctions continues.* Note de M. **Marc Zamansky**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Soit $f(x)$ une fonction continue périodique de période 2π. On sait que si $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α

$$(|f(x)-f(x')|<\mathrm{M}|x-x'|^{\alpha},\ 0<\alpha<1),$$

on peut trouver une suite de polynomes trigonométriques $\mathrm{P}_n(x)$ d'ordre n, tels que quels que soient n et x, on ait

$$|f(x)-\mathrm{P}_n(x)|<\frac{\mathrm{K}.\mathrm{M}}{n^{\alpha}}, \tag{1}$$

la constante K ne dépendant que de α et de la suite $\mathrm{P}_n(x)$ considérée.

Nous démontrons que

Quelle que soit la suite $\{\mathrm{P}_n(x)\}$ approchant $f(x)$ à moins de KM/n^{α} près, on a

$$|\mathrm{P}'_n(x)|<\mathrm{C}_{\alpha}\mathrm{A}.\mathrm{M}\,\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \tag{2}$$

quels que soient x et n, A étant une constante absolue, C_{α} une constante ayant une limite finie quand α tend vers 1.

En effet si une suite $\{P_n(x)\}$ satisfait aux inégalités (1) et (2) pour les valeurs n_p de n telles que n_{p+1}/n_p soit borné pour $p\,\infty$, la suite

$$\{P_{n_p}(x) + \lambda_{n_p+m}(x)\} \qquad (m = 0, 1, \ldots, n_{p+1} - n_p - 1)$$

satisfait aux mêmes inégalités où l'on modifie éventuellement les valeurs de K et C_α, si les polynomes $\lambda_n(x)$ sont convenablement choisis [par exemple $|\lambda_n(x)| < 1/n^2$, $|\lambda'_n(x)| < 1/n$].

D'autre part, si pour deux suites $\{P_n(x)\}$, $\{Q_n(x)\}$

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{KM}{n^\alpha}, \qquad |f(x) - Q_n(x)| < \frac{K'M}{n^\alpha},$$

on a

$$|P_n(x) - Q_n(x)| < \frac{M(K + K')}{n^\alpha},$$

et d'après le théorème de Bernstein

$$|P'_n(x) - Q'_n(x)| < M(K + K')\, n^{1-\alpha}.$$

Il suffit donc de prouver que si l'inégalité (1) a lieu, l'inégalité (2) a lieu pour une suite d'entiers : a^p (a entier ≥ 2). On peut utiliser les sommes de Jackson [1] d'ordre $2n - 1$

$$P_{2n-1}(x) = \frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{2t}{n}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt.$$

D'où

$$|P_{2a^p-1} - P_{2a^{p-1}-1}| < A\,M\,(a-1)^\alpha \frac{1}{a^{p\alpha}}, \quad \text{où A est une constante absolue;}$$

$$|P'_{2a^p-1} - P'_{2a^{p-1}-1}| < 2A\,M\,(a-1)^\alpha\, a^{p(1-\alpha)}.$$

Et

$$|P'_{2a^p-1}(x)| < C_\alpha\, A\, M \frac{(2a^p - 1)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

C_α reste bornée quand α tend vers 1 (C_α tend vers $2/\log 2$ quand α tend vers 1, si $a = 2$), ce qui prouve le théorème.

Si réciproquement $|f(x) - P_n(x)| < K/n^\alpha$, $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α et un calcul analogue prouve que dans le résultat précédent, on peut remplacer $C_\alpha\,A\,M$ par $C'_\alpha\,K$, où C'_α tend vers $6/\log 2$ quand α tend vers 1 pour $a = 2$.

Si $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre 1

$$|f(x) - f(x')| < M\,|x - x'|,$$

elle peut être approchée quel que soit n à moins de KM/n près et *quelle que soit la suite $\{P_n(x)\}$ telle que*

$$(3) \qquad |f(x) - P_n(x)| < \frac{KM}{n},$$

---

[1] Voir DE LA VALLÉE POUSSIN, *Leçons sur l'approximation*.

$|P'_n(x)| < C$, C *étant une constante ne dépendant que de la suite* (P_n) *considérée*.

En effet, on voit encore qu'il suffit de le prouver pour une suite $\{P_n(x)\}$ satisfaisant à (3) et une suite $\{n_p\}$ telle que n_{p+1}/n_p soit borné pour $p\ \infty$.

On a

$$\frac{P_{2n-1}(x+h) - P_{2n-1}(x)}{h} = \frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{f\left(x+\frac{2t}{n}+h\right) - f\left(x+\frac{2t}{n}\right)}{h}\right]\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt,$$

d'où $|P'_{2n-1}(x)| < M$.

Il est clair que, réciproquement, si une suite $\{P_n(x)\}$ converge uniformément de façon que $|P'_n(x)| < C$, la fonction limite $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre 1.

Enfin, *si* $f(x)$ *peut être approchée à moins de* K/n *près par une suite* $\{P_n(x)\}$ *de polynomes quel que soit* n, $|P'_n(x)| < C \log n$, *la constante* C *ne dépendant que de la suite* $\{P_n\}$.

Car quel que soit $\alpha < 1$, on a $|P'_n| < C'_\alpha K[n^{1-\alpha}/(1-\alpha)]$ et le minimum de $n^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ est $e \log n$.

Ces résultats s'étendent par les mêmes raisonnements aux cas où $f(x)$ possède une dérivée d'ordre r satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre α ou peut être approchée à moins de KM/n^{r+1} près. On remplacera $|P'_n|$ par $|P_n^{(r+1)}|$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une signification topologique et une généralisation d'une formule de Bendixson.* Note [1] de Mme **Pierre-Louis Dubois-Violette**, présentée par M. Gaston Julia.

1. Étant donnée une équation différentielle du premier ordre et du premier degré, Bendixson a établi que l'on avait pour un point singulier quelconque $i = (r-p)/2 + 1$, en désignant par i l'indice du point singulier, par r le nombre de secteurs nodaux fermés et par p le nombre de secteurs répulsifs au voisinage du point singulier étudié.

Considérons un point singulier O d'indice i; i sera l'indice d'un cycle C entourant le point et ne contenant à son intérieur aucun autre point singulier que le point étudié. Par l'introduction d'un paramètre ε dans l'équation différentielle, nous pouvons remplacer le point par un ensemble de points singuliers simples voisins de O, les uns réels (soient n nœuds, f foyers, α centres et c cols), les autres imaginaires. Pour $\varepsilon = 0$ nous retrouvons l'équation initiale et nous pouvons prendre ε assez petit pour que tous les points singuliers réels résultant de la décomposition soient à l'intérieur du cycle C considéré. L'indice de ce cycle est alors $(n + f + \alpha - c)$.

---

[1] Séance du 7 mai 1945.

Faisons tendre ε vers 0; nous voyons que l'indice du point singulier multiple étudié sera égal à $(n+f+\alpha-c)$.

En rapprochant cette valeur de i, de la valeur trouvée par Bendixson, on aperçoit que l'on aura pour un point singulier multiple résultant de la fusion de n nœuds, f foyers, α centres et c cols

$$n+f+\alpha-c=1+\frac{r-p}{2},$$

ce qui établit une relation entre deux caractères géométriques du point singulier.

2. Nous avons cherché à établir cette formule géométriquement et sans faire intervenir la notion algébrique d'indice.

Pour cela, nous avons considéré un point singulier A quelconque admettant p secteurs répulsifs, q secteurs nodaux ouverts et r secteurs nodaux fermés.

Nous avons étudié le point résultant de la fusion avec le point A, d'un point S présentant les propriétés topologiques de l'un des quatre types de points singuliers simples, au sens de ma Note antérieure (²). Le point S étant supposé au voisinage de A, nous considérons un chemin L joignant S à A et nous faisons tendre S vers A le long de L. Nous étudions la déformation du réseau de courbes au voisinage de A et de S pour en déduire les nouvelles caractéristiques du point singulier A résultant de la fusion de S avec A.

Le chemin L est astreint à la seule condition que la fusion de S avec A le long de L ne modifie ni le nombre, ni le type des autres points singuliers du réseau de courbes considéré. Ceci exige que L ne passe par aucun autre point singulier que A et S. En outre, dans la fusion de S et A, il peut y avoir disparition de certaines régions au voisinage de A et de S, à condition toutefois que ces régions ne contiennent aucun point singulier autre que A ou S à leur intérieur ou sur leur frontière.

Nous avons montré, dans ces hypothèses, que la fusion avec A d'un col augmente la différence $(p-r)$ de deux unités, puis que la fusion avec A d'un centre diminue $(p-r)$ de deux unités, de même que la fusion avec A d'un nœud ou d'un foyer.

Si nous considérons un point obtenu par la fusion de c cols, n nœuds, f foyers et α centres, on aura par suite

$$p-r=2c-2n-2f-2\alpha+\text{const.}$$

On vérifie facilement que la valeur de la constante est indépendante du choix initial que l'on fait pour A de l'un ou de l'autre des points singuliers simples qui confluent en A et que l'on a toujours

$$p-r=2(c-n-f-\alpha)+2.$$

(²) *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 625.

d'où

$$n + f + \alpha - c = \frac{r-p}{2} + 1.$$

3. La démonstration géométrique précédente constitue une extension topologique de la formule (1) que nous avions déduite de la formule de Bendixson $i = (r-p)/2$. Elle s'applique en particulier aux points singuliers multiples des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. Mais elle s'applique aussi plus généralement à un point quelconque obtenu par la fusion géométrique de plusieurs points présentant les caractères topologiques de l'un des quatre types de points singuliers simples.

Si l'on considère un point singulier multiple d'une équation différentielle du premier ordre et du premier degré, par l'introduction d'un paramètre ε nous remplaçons le point par un ensemble de points singuliers simples. Le nombre de ces points qui sont réels dépend de la façon dont ε intervient dans l'équation tandis que la quantité $(n + f + \alpha - c)$ ne dépend que du point multiple considéré.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur les tenseurs dérivés de Gauss et Codazzi.* Note de M. **Richard Blum**, présentée par M. Élie Cartan.

Soient

$$\text{(A)} \quad G_{iklm} \equiv n_{iklm} - (b_{\alpha/il} b_{\alpha/km} - b_{\alpha/im} b_{\alpha/kl}) = 0,$$

$$(i, k, l, m, p, s = 1, 2, \ldots, n; \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, \nu),$$

$$\text{(B)} \quad C_{\alpha/ikl} \equiv \nabla_k b_{\alpha/il} - \nabla_i b_{\alpha/kl} + (t_{\alpha\beta/k} b_{\beta/il} - t_{\alpha\beta/i} b_{\beta/kl}) = 0;$$

$$\text{(C)} \quad K_{\alpha\beta/ik} \equiv \nabla_i t_{\alpha\beta/k} - \nabla_k t_{\alpha\beta/i} + (t_{\gamma\alpha/k} t_{\gamma\beta/i} - t_{\gamma\alpha/i} t_{\gamma\beta/k}) + a^{lm}(b_{\alpha/lk} b_{\beta/mi} - b_{\alpha/li} b_{\beta/mk}) = 0$$

les équations de Gauss, Codazzi et Ricci-Kühe d'un V_n (avec ds^2 défini positif) plongé dans un $R_{n+\nu}$ (1). Si, le V_n étant donné, ces équations admettent un système de solutions réelles en $b_{\alpha/ik}$ et $t_{\alpha\beta/i}$, la classe de V_n est $k \leq \nu$. Ce cas se présente toujours si

$$\text{(1)} \qquad \nu = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{(classe maximum du } V_n\text{)} \quad (2).$$

Formons les tenseurs dérivés de Gauss et Codazzi :

$$\text{(D)} \qquad G_{piklm} = \nabla_p G_{iklm} + \nabla_i G_{kplm} + \nabla_k G_{pilm};$$

$$\text{(E)} \qquad C_{\alpha/pikl} = \nabla_p C_{\alpha/ikl} + \nabla_i C_{\alpha/kpl} + \nabla_k C_{\alpha/pil};$$

---

(1) Voir par exemple G. Vranceanu, *Rend. Ac. Lincei*, 11, 1930.

(2) Voir E. Cartan et M. Janet, *Ann. Soc. Polon. de Math.*, VI et V, 1926-27, et Burstin, *Recueil Soc. Math.*, Moscou, 38, 1931.

Le nombre des G_{pklm} est $n^2(n^2-1)(n-2)/24$ [3], tandis que le nombre des $C_{\alpha/pikl}$ est $\nu n(n^2-1)(n-2)/8$ [4].

Supposons maintenant que les équations (A) et (B) admettent un système de solutions réelles en $b_{\alpha/ik}$ et $t_{\alpha\beta/i}$, (E) conduit alors à

$$(\mathrm{E}')\qquad b_{\beta/lp}K_{\alpha\beta/ik}+b_{\beta/il}K_{\alpha\beta/kp}+b_{\beta/lk}K_{\alpha\beta/pl}=0\quad \text{avec}\quad \frac{\nu n(\nu-1)(n-1)}{4}$$

inconnues $K_{\alpha\beta/ik}$. Le nombre des équations est au moins égal au nombre des inconnues si $\nu\leq n(n-1)/2$. A cause de (1) il s'ensuit que :

Les équations de Ricci-Kühne sont une conséquence des équations de Gauss et Codazzi, si le rang de la matrice du système (E′) *est maximum.*

Soit maintenant $b_{\alpha/ik}$ un système de solutions réelles de A. (D) devient

$$(\mathrm{D}')\quad b_{\alpha/pl}C_{\alpha/lkm}+b_{\alpha/il}C_{\alpha/kpm}+b_{\alpha/kl}C_{\alpha/pim}-b_{\alpha/pm}C_{\alpha/lkl}-b_{\alpha/lm}C_{\alpha/kpl}-b_{\alpha/km}C_{\alpha/pil}=0.$$

Soit $n^2(n^2-1)(n-2)/24$ équations avec $\nu n(n^2-1)/3$ *inconnues* $C_{\alpha/ikl}$. Il suit :

1° *Pour* $0<\nu\leq n(n-2)/8$, *les équations de Codazzi sont une conséquence des équations de Gauss, si le rang de la matrice du système* (D′) *est maximum.*

2° *Pour* $n(n-2)/8<\nu\leq n(n-1)/2$, *certaines équations de Codazzi, au nombre de* $n^2(n^2-1)(n-2)/24$, *sont une conséquence des équations de Gauss et des autres équations de Codazzi, si le rang de la matrice du système* (D′) *est maximum.*

Observons que les éléments des matrices de (D′) et (E′) sont formés uniquement avec les $b_{\alpha/ik}$. Il en résulte

1. *Pour* $0<\nu\leq n(n-2)/8$ *la classe de* V_n *est* $k\leq\nu$, *si les équations de Gauss admettent un système de solutions réelles en* $b_{\alpha/ik}$ *pour lesquelles les rangs des matrices de* (D′) *et* (E′) *sont maxima* [5].

2. *Pour* $n(n-2)/8<\nu<n(n-1)/2$ *la classe de* V_n *est* $k\leq\nu$, *si les équations de Gauss admettent un système de solutions réelles en* $b_{\alpha/ik}$ *pour lesquelles les rangs des matrices de* (D′) *et* (E′) *sont maxima et qui, avec des* $t_{\alpha\beta/i}$ *convenablement choisis, satisfont à certaines équations de Codazzi en nombre de*

$$\frac{n(n^2-1)}{3}\left[\nu-\frac{n(n-2)}{8}\right].$$

(3) Voir R. Blum, *Bull. Sc. Ac. Roumaine*, 28, n° 6, 1946.

(4) Les identités algébriques des $C_{\alpha/pikl}$ sont

$$C_{\alpha/pikl}=C_{\alpha/ikpl}=C_{\alpha/kpil}=-C_{\alpha/pki}=-C_{\alpha/kipl}=-C_{\alpha/ipkl}$$

et

$$C_{\alpha/iklp}=C_{\alpha/pikl}+C_{\alpha/pkli}+C_{\alpha/plik},$$

d'où il suit le nombre indiqué.

(5) Pour $\nu=1$ (et par conséquent $n\geq4$) ce résultat a été déjà obtenu par T. Y. Thomas (*Acta mathematica*, 67, 1936). Les équations (D′) et (E′) ont été considérées par C. B. Allendörfer qui les discute à l'aide d'une généralisation du *nombre type* de T. Y. Thomas (*Am. Journal of Math.*, 61, 1939).

A ces cas *réguliers* on peut opposer le cas *singulier* où un au moins des rangs r_1 et r_2 des matrices de (D′) et (E′) n'est pas maximum. Il résulte :

3. *Si, pour* $0 < \nu < n(n-1)/2$, *les équations de Gauss admettent un système de solutions réelles en* $b_{\alpha|ik}$ *pour lesquelles les matrices des systèmes* (D′) *et* (E′) *n'ont pas rangs maxima, ces* $b_{\alpha|ik}$ *doivent satisfaire, avec des* $t_{\alpha\beta|i}$ *convenablement choisis, à certaines équations de Codazzi et Ricci-Kühne, respectivement au nombre de* $[\nu n(n^2-1)/3 - r_1]$ *et* $[\nu n(\nu-1)(n-1)/4 - r_2]$, *pour que les* V_n *soient de classe* $k \leqq \nu$.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Un instrument d'étude des fonctions aléatoires : la fonctionnelle caractéristique*. Note de M. **Le Cam**, présentée par M. Émile Borel.

En vue de préciser et généraliser certains résultats obtenus par M. Halphen dans l'étude statistique des débits, nous avons été amené à introduire un instrument de calcul qui présente pour les fonctions aléatoires le même intérêt que la fonction caractéristique pour les variables aléatoires.

Soit $x(t)$ une fonction aléatoire; nous appellerons fonctionnelle caractéristique pour $x(t)$ et $s(t)$ le nombre

$$\varphi_x^{[s(t)]} = \mathrm{E}\, e^{i\int x(t)\, s(t)\, dt},$$

E dénotant l'espérance mathématique. On peut de même appeler $\Psi = \log \varphi$ la deuxième fonctionnelle caractéristique.

Nous avons utilisé quelques-unes des propriétés de Ψ pour voir comment les variations de la pluie retentissent sur les débits.

Pour cela, nous avons repris les hypothèses formulées il y a quelques années par M. Halphen : la pluie est supposée formée d'averses brusques, instantanées, de valeur $dy(t)$, réparties au hasard dans le temps suivant une loi de Poisson dont la densité elle-même $\nu(t)$ est une fonction aléatoire.

Soit $1 + \omega(s)$ la fonction caractéristique des $dy(t)$ non nuls, la fonction caractéristique de la pluie tombée dans l'intervalle $[t, t+dt]$ est alors $\nu(t)$, étant supposé connu,

$$e^{\nu(t)\omega[s(t)]}.$$

Soit ψ_ν la deuxième fonctionnelle caractéristique de $x(t)$, on en tire aisément

$$\psi_y = \mathrm{Log}\,\mathrm{E}\, e^{i\int s(t)\, dy(t)} = \psi_\nu\{-i\omega[s(t)]\}.$$

Si, d'autre part, on peut représenter le débit $x(t)$ par une formule du type

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t, \tau)\, dy(\tau),$$

alors posant

$$u(t) = \int_{t}^{\infty} h(\tau, t)\, s(\tau)\, d\tau,$$

on aura

$$\psi_x[s(t)] = \psi_y[u(t)].$$

De ces formules, on tire immédiatement la fonctionnelle caractéristique de $x(t)$.

Nous avons développé les calculs dans quelques cas simples, les formules obtenues sont trop complexes pour trouver place ici, beaucoup auraient pu être obtenues autrement, mais elles sont particulièrement commodes à trouver par le moyen de ces fonctionnelles. On peut ainsi faire l'étude des moments du second, troisième etc. $n^{\text{ième}}$ ordre, de moyennes temporelles ou de coefficients de Fourier d'une fonction aléatoire. Nous remettons à plus tard la publication des résultats relatifs aux débits et pluies, les vérifications expérimentales n'étant pas toutes satisfaisantes. On peut toutefois signaler les points suivants :

Soient

$$N = \int_0^T \nu(t)\,dt, \qquad Y = \int_0^T dy(t), \qquad X = \int_0^T x(t)\,dt,$$

la corrélation entre Y_1 et Y_2 de deux périodes consécutives $r = R(\sigma^2 - km)/\sigma^2$ (σ^2 = variance de Y, m = moyenne de Y) apparaît comme le produit de la corrélation R entre N_1 et N_2 et d'un terme donnant la corrélation entre deux stations éloignées où l'on suppose les pluviosités $\nu(t)$ égales (ceci semble vérifié par l'expérience). En supposant de plus $\nu(t)$ stationnaire, de moyenne constante et de covariance $H\rho e^{-\rho|t-\tau|}$ et $h(t, r)$ de la forme $k\lambda e^{-\lambda|t-\tau|}$ et $1 + \omega(s) = 1/(1 - ais)$ (demi-loi de Laplace), on aura

$$\text{corrélation entre } Y_1 \text{ et } X_1 = \frac{\text{coefficient de variation de } X_1}{\text{coefficient de variation de } Y_1},$$

$$\text{corrélation entre } Y_1 \text{ et } X_2 = r_{Y_1X_2} = 2r_{X_1X_2}r_{X_1Y_1} - \frac{\lambda}{\lambda+\rho}\frac{r_{Y_1Y_2}}{r_{X_1Y_1}}.$$

Ces formules demanderont à être modifiées pour tenir compte de l'enneigement, de la température, de l'imbibition du sol. Le calcul dans d'autres hypothèses pourra se conduire à peu près de la même façon.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Étude de l'écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible.* Note de M. **Henri Cabannes**, présentée par M. Joseph Pérès.

On sait que lorsqu'on étudie, sur les équations linéarisées de Stokes, l'écoulement permanent uniforme d'un fluide visqueux incompressible troublé par la présence d'un obstacle, on obtient une solution dans le cas de l'espace, mais pas de solution dans le cas du plan. Ce résultat constitue le paradoxe de Stokes. Dans le cas de l'espace, lorsqu'on cherche à passer à la seconde approximation, on n'obtient plus de solution; ce second résultat constitue le paradoxe de Whitehead. On peut rapprocher de ces difficultés les conclusions que nous

allons établir dans le cas où l'on considère les équations complètes des fluides visqueux :

« Il n'existe pas de solution des équations de Navier représentant l'écoulement permanent uniforme, autour d'un obstacle fixe, et donnant un champ de vitesses régulier à l'infini, c'est-à-dire doué d'un développement en série, uniformément convergent,

$$\overrightarrow{V(\rho, \theta, \varphi)} = \overrightarrow{V_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overrightarrow{\alpha_n(\theta, \varphi)}}{\rho^n},$$

où les fonctions $\overrightarrow{\alpha_n(\theta, \varphi)}$ possèdent des dérivées partielles des trois premiers ordres. »

En effet, la fonction vectorielle $\overrightarrow{V}$ des trois variables ρ, θ, φ définissant la position d'un point au moyen de ses coordonnées sphériques, doit vérifier l'équation suivante :

$$\overrightarrow{V \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} V} + \overrightarrow{\operatorname{rot} \{ \operatorname{rot} V \wedge V \}} = 0. \tag{1}$$

En remplaçant dans cette relation $\overrightarrow{V}$ par son développement en série et en identifiant suivant les puissances de ρ, nous obtenons une suite infinie d'équations aux dérivées partielles, qui nous permettent d'étudier de proche en proche les fonctions de deux variables $\overrightarrow{\alpha_n(\theta, \varphi)}$. Supposant que les vecteurs $\overrightarrow{\alpha_i/\rho^i}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ aient un rotationnel nul, l'équation de rang n s'écrit sous l'une des deux formes suivantes :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}\left\{ \operatorname{rot} \frac{\alpha_n}{\rho^n} \wedge V_0 \right\}} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z} \overrightarrow{\operatorname{rot} \frac{\alpha_n}{\rho^n}} = 0. \tag{2}$$

Cette dernière équation exprime que le vecteur $\overrightarrow{\alpha_n/\rho^n}$ est la somme d'un vecteur indépendant de z et du gradient d'une fonction arbitraire. On peut donc écrire

$$\frac{\overrightarrow{\alpha_n(\theta, \varphi)}}{\rho^n} = \frac{\overrightarrow{\alpha(\varphi)}}{(\rho \sin\theta)^n} + \overrightarrow{\operatorname{grad} \frac{U(\theta, \varphi)}{\rho^{n-1}}}.$$

Désignant par $l(\varphi)$, $m(\varphi)$ et $n(\varphi)$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{\alpha(\varphi)}$ sur les axes fixes, il est nécessaire d'avoir, afin que les composantes du vecteur $\overrightarrow{\alpha_n/\rho^n}$ sur les axes du trièdre fondamental associé aux coordonnées sphériques restent bornées, d'une part $n(\varphi) \equiv 0$, d'autre part

$$\lim_{\theta=0} (\sin\theta)^{n-1}\, U = \frac{l\cos\varphi + m\sin\varphi}{n-1},$$

$$\lim_{\theta=0} (\sin\theta)^{n-1} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = l\sin\varphi + m\cos\varphi.$$

En intégrant la seconde relation et en comparant à la première, nous

obtenons une nouvelle relation entre les fonctions $l(\varphi)$, $m(\varphi)$ et leurs dérivées premières. Or, cette relation exprime précisément que le rotationnel des vecteurs $\overrightarrow{\alpha(\varphi)/(\rho\sin\theta)^n}$ ou $\overrightarrow{\alpha_n(\theta, \varphi)/\rho^n}$ est nul. Ce raisonnement étant valable pour toutes les valeurs de n, l'écoulement envisagé est lui-même irrotationnel.

Une telle conclusion est incompatible avec la condition d'adhérence du fluide à la surface d'un obstacle. En effet, le mouvement étant irrotationnel, il existe un potentiel des vitesses, et la viscosité n'intervient plus. Or, lorsqu'un corps solide se déplace d'une translation rectiligne et uniforme dans un fluide parfait animé d'un mouvement irrotationnel, le fluide glisse à la surface du corps.

Dans le cas particulier où l'écoulement est de révolution, il existe une fonction de courant. Nous obtenons alors la même conclusion, sans qu'il soit nécessaire de supposer que le mouvement soit rectiligne et uniforme à l'infini.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Les équations de la couche limite dans le cas de gradients de vitesse élevés.* Note de M. **Gabriel Viguier**, présentée par M. Joseph Pérès.

Les équations classiques de la mécanique des fluides, s'appliquant à un fluide homogène et isotrope, admettent une liaison linéaire entre les tensions de viscosité et les vitesses de déformation; or, ceci n'est exact que si le gradient des vitesses est faible, et il est à peu près certain que de telles équations ne pourront s'appliquer au voisinage du corps où le gradient des vitesses peut être grand.

Il est alors possible de considérer les forces de viscosité comme fonctions inconnues F_i des gradients de vitesse, fonctions d'ailleurs impaires [1].

Nous admettons que nous pouvons les développer en série de Mac Laurin; se limitant aux termes du troisième degré, on est amené à introduire de nouveaux coefficients de viscosité A, B, C, D et E égaux à des expressions en

$$\frac{\partial^3 F_i}{\partial U'_{ii}\,\partial U'_{jj}\,\partial U'_{kk}} \quad \text{avec} \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Les quantités U_i, U_j et U_k étant les composantes du vecteur vitesse suivant les axes principaux de dilatation MX_i pris comme trièdre de référence.

Les composantes de Stokes comportent alors un terme complémentaire du 3e degré, et il devient aisé d'écrire les nouvelles équations d'équilibre qui en résultent.

Utilisant ces résultats, essayons d'établir les équations différentielles de la couche limite dans le cas de l'écoulement plan d'un fluide visqueux incompressible, indéfini, homogène et libre d'actions extérieures.

---

(1) M. Maurice Girault, *Essai sur la viscosité en mécanique des fluides* (P. S. T., 1931).

Soit L et U_0 une longueur et une vitesse convenablement choisies dans chaque cas particulier; posons :

$$X_i = \frac{x_i}{L}, \qquad U_i = \frac{u_i}{U_0}, \qquad P = \frac{p}{\rho U_0^2},$$

et revenons pour plus de commodité à l'écriture initiale.

Introduisons enfin le nombre de Reynolds R et le nombre T, sans dimension :

$$R = \frac{LU_0}{\nu}, \qquad T = \frac{\rho L^3}{DU_0}.$$

Nous pouvons admettre comme limite de l'écoulement, l'écoulement à potentiel (²)

$$u_1^{(0)} = a x_1, \qquad u_2^{(0)} = -a x_2, \qquad p_0 = p^{(0)} + \frac{1}{2}[u_1^{(0)2} + u_2^{(0)2}];$$

la quantité a et la pression p_0 étant deux constantes positives.

Utilisant le changement de variables

$$2\omega = \sqrt{3aR}\, x_1,$$

$$\theta = \sqrt{aR}\, x_2;$$

nous avons

$$u_1 = 2\sqrt{\frac{a}{3R}}\,\omega\,\frac{d}{d\theta}\psi(\theta, R, T),$$

$$u_2 = -\sqrt{\frac{a}{R}}\,\psi(\theta, R, T),$$

$$p = p_0 - \frac{a}{R}\left[\frac{2}{3}\omega^2 + \varphi(\theta, R, T)\right].$$

Les équations du mouvement prennent alors la forme définitive

$$\psi''' + \psi''\psi - \psi'^2 + 1 + \frac{a^2 R}{2T}(\psi'''\psi'^2 + 3\psi'\psi''^2 + \omega^2\psi'''\psi''^2) = 0,$$

$$\varphi' = \psi'' + \psi\psi' + \frac{a^2\omega^2 R}{6T}\psi''(\psi'''\psi' - \psi''^2) + \frac{5a^2 R}{16T}\psi''\psi'^2.$$

Dans l'hypothèse où $1/T$ est nul, nous retrouvons l'équation classique de la couche limite $\psi''' + \psi''\psi - \psi'^2 + 1 = 0$, pour laquelle de nombreux auteurs ont, par des procédés arithmétiques, déterminé diverses solutions particulières.

HYDRAULIQUE. — *Principe de similitude hydromécanique.*
Note (¹) de M. **Francis Myard**, présentée par M. Joseph Pérès.

Considérons deux pompes P et P′ rotatives, à volume engendré et *réversibles*, ces pompes pouvant être semblables, ou différentes de principe. Soient, sym-

(²) H. Schmidt et K. Schroeder, *Les fondements de la théorie de la couche limite* (Luftfahrtforschung, 26 avril 1942).

(¹) Séance du 3 mars 1947.

boliquement, P_s et P_r les deux éléments essentiels à rotation relative (autour d'un axe X) constituant la pompe P; et P'_s et P'_r (et X') les éléments analogues afférant à P'. Soient q le volume balayé, par tour relatif entre P_s et P_r, dans P', et q' celui, pareillement défini dans P'. Soient O_1 et O_2 les deux ouies de P, lesquelles (la pompe étant réversible) peuvent être, respectivement, d'entrée et de sortie, ou inversement (suivant le sens rotatif), et O'_1 et O'_2 les ouies, mêmement envisagées, de P'.

Alignons les deux axes X et X', et solidarisons *mécaniquement* (du point de vue rotatif) P_r et P'_r de manière que tout l'ensemble soit centré autour de l'axe géométrique commun XX'. Et, enfin, faisons la conjonction hydraulique des deux pompes en considérant, par exemple, que O_1 soit l'orifice de refoulement de P et communique avec O'_1 qui est, momentanément, celui d'entrée du liquide dans P'; tandis que le liquide sort de P' par O'_2 pour rejoindre O_2 (aspiration de P).

Nous disons qu'un tel mécanisme constitue un dispositif identique (mathématiquement parlant) à un train différentiel à engrenages de raison $k = \pm q'/q$.

En effet, soient ω, u et u' les vitesses angulaires, respectivement, des trois éléments à rotations possibles P_s, bloc $P_r P'_r$, et P'_s; et N, n et N' les nombres de tours-minute correspondants. Du fait des rotations relatives, P refoule un débit $q(N - n)$ qui est reçu par P'. Or le débit absorbé par P' a, de son côté, pour valeur $q'(N' - n)$. Et (nous supposons les fuites nulles) ces deux débits étant égaux, $q(N - n) = q'(N' - n)$. D'où $(N - n)/(N' - n) = q'/q = k$.

Mais nous avons négligé le signe du rapport des rotations relatives $(\omega - u)$ et $(\omega' - u)$. Or, il est clair que le sens de la rotation relative de P_s par rapport à P_r étant choisi (et ce sens importe peu), si les liaisons hydrauliques sont établies entre $O_1 O'_1$ et $O_2 O'_2$ ou bien entre $O_1 O'_2$ et $O_2 O'_1$, on obtiendra, d'après la réversibilité des pompes, des rotations relatives de P'_s par rapport à P'_r qui seront opposées.

Tenant compte de ce que la conjonction hydraulique peut être directe, ou croisée, nous pourrons donc écrire, au total,

$$\frac{N - n}{N' - n} = \frac{\omega - u}{\omega' - u} = \pm \frac{q'}{q} = \pm k.$$

Formule identique à celle de Willis [le double signe analogue, dans cette dernière, étant dû au fait que le train épicycloïdal peut comporter soit deux couples d'engrenages externes (ou internes), soit un couple externe, et un interne].

Nous avons donc une liaison linéaire entre les trois grandeurs algébriques ω, u et ω' (ou N, n et N') et, comme à propos des trains épicycloïdaux, imposons-nous, par exemple, $\omega' = 0$ (donc $N' = 0$). D'où $(\omega - u)/(-u) = \pm k$. Alors, nous pouvons soit nous fixer, à priori, une valeur déterminée de ω, et ainsi, nous aurons une variation hyperbolique de u en fonction de k; soit — cas utile,

pratiquement — nous fixer une valeur déterminée de u, et il en résultera une variation linéaire de ω en fonction de k. Quand il s'agit des trains de Willis, le nombre k (fraction dont les deux termes sont des produits de diamètres primitifs, ou nombres de dents) ne peut varier que par paliers successifs. Les valeurs de k sont donc en nombres limités *mécaniquement*, et l'ensemble ne peut constituer qu'une boîte de vitesses à étages.

Au contraire, dans les trains différentiels hydrauliques que nous venons de formuler, la raison k peut varier en toute continuité puisqu'elle représente un rapport dont les deux termes sont des volumes balayés, c'est-à-dire des grandeurs susceptibles, *physiquement*, de varier sans discontinuité.

Cas particulier. — Supposons les deux pompes P et P′ identiques et, de plus, à débit variable, et pour chacune d'elles, soit q_m le volume balayé maximum par tour. Enfin, outre les conjonctions mécaniques et hydrauliques précédentes et $N' = 0$, supposons un réglage simultané de leurs deux volumes engendrés momentanés q et q' de manière que ceux-ci soient complémentaires à q_m, par exemple suivant la loi simple $q = q_m x$ et $q' = q_m(1 - x)$, x étant une fraction variable comprise entre 0 et 1.

Or, c'est tout simplement à un schéma hydrocinématique de cet ordre que se trouvent correspondre certains variateurs continus de vitesse existants (tel le variateur Saussard). Mais la théorie générale que nous venons de dégager nous permet, maintenant, d'expliciter très facilement la conception de tels dispositifs et le comportement des phénomènes qui s'y rapportent.

Imaginons que la conjonction hydraulique soit choisie de façon à nous donner le signe — devant k. Alors $(N - n)/(-n) = -(1 - x)/x$. D'où $n = N.x$. Soient W la puissance transmise et y la pression dynamique du fluide. On aura $W = q_m.x(N - n).y = q_m(1 - x).n.y$. D'où (puisque $n = N.x$) $W = q_m N x(1 - x)$. La variation du débit $q_m x(1 - x)N$ est représentée par un arc de parabole, avec débit nul aux limites $x = 0$, $x = 1$. Si la même puissance W entraînait à $N t.m$ l'élément P_s de la pompe P, à son maximum de débit, et sans qu'il y eût liaison mécanique avec P′, la pompe P refoulerait, dès lors, le liquide sous la pression p telle que $W = q_m.N.p$. Il s'ensuit $y = p/x(1 - x)$, et y devient infini (théoriquement, puisque fuites et pertes d'énergie ont été négligées) aux limites $x = 0$ $n = 0$, et $x = 1$ $n = N$.

L'analogie avec les trains se poursuit, ici, puisque l'on sait que, dans ceux-ci, les efforts théoriquement deviennent ∞ entre les dentures si, pour une vitesse u déterminée, on veut atteindre pour ω soit la limite u, soit la limite zéro.

Nota. — Cette idée d'analogie entre des mécanismes à éléments relatifs différentiels, avec conjonction mécanique par engrenages ou autres, et des mécanismes à éléments rotatifs différentiels avec conjonction par fluide moteur peut être généralisée, indépendamment de la nature du fluide et son mode d'action. Il suffit que les nombres de tours différentiels traduisent l'expression d'une quantité (ou d'une fonction) représentant un facteur de transmission

de puissance (par exemple, une force électromotrice proportionnelle à une vitesse angulaire relative). Évidemment, les modalités de calcul pourront différer (perturbations dans les calculs précédents du fait des compressions ou détentes, si le fluide est gazeux; des pertes ohmiques intérieures, des actions de self ou capacité, s'il s'agit de fluide électrique...), mais l'analogie d'ensemble mérite d'être retenue.

MÉCANIQUE PHYSIQUE. — *Remarques à propos de l'entretien d'un pendule par le courant alternatif*. Note [1] de M. **Charles Cassignol**, présentée par M. Joseph Pérès.

L'entretien des oscillations d'un pendule par un courant alternatif de pulsation quelconque mais très grande par rapport à la pulsation propre du pendule est connu depuis plusieurs années [2]. Il a donné lieu à des études théoriques et à des réalisations pratiques.

Rappelons-en le principe [3]. Une masse en métal magnétique sans hystérésis et sans pertes est fixée à l'extrémité libre d'un pendule et pénètre plus ou moins dans une bobine de self L fixe en position.

La bobine est connectée à un condensateur C et le circuit oscillant ainsi constitué est alimenté en série par un courant alternatif de tension E et de pulsation ω constantes ($\omega > \alpha$, pulsation propre du pendule). La modulation périodique de la self de la bobine entraîne des variations périodiques du régime du courant. Ces variations se produisant avec un certain retard, il apparaît une force en phase avec la vitesse et en première approximation proportionnelle à la vitesse, dont l'effet est soit d'amortir, soit d'entretenir le pendule. Dans ce dernier cas, pour qu'il y ait effectivement entretien, il faut que cette force soit supérieure à l'amortissement mécanique du pendule, ce qui implique l'existence d'un seuil de tension.

1. *Analyse qualitative du phénomène*. — La force qui s'exerce sur la masse M est

$$F = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}.$$

Pour que l'entretien soit possible, il faut qu'elle soit plus grande, pour x donné, quand la vitesse est positive. Ceci est réalisé à cause du phénomène de retard, si l'intensité est une fonction décroissante de x. En d'autres termes, l'augmentation du coefficient de self-induction provoquée par un accroissement positif

---

(1) Séance du 24 février 1947.

(2) J. Bethenod, Brevet français 691515 du 30 mai 1929.

(3) Y. Rocard, *Dynamique générale des vibrations*, p. 242.

de x doit écarter le circuit oscillant de la résonance, ce qui se traduit par

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} \geqq 0,$$

Ce résultat est vérifié par l'expérience.

Remarquons que le mécanisme de l'entretien que nous proposons a une parenté certaine avec celui de la sonnerie électrique à trembleur (courant continu). On peut même le généraliser à des modes d'entretien très variés, ce qui revient à dire que les phénomènes transitoires ont une incidence très nette sur la stabilité des systèmes oscillants.

2. *Étude mathématique du problème des faibles oscillations.* — Nous nous bornerons à calculer le seuil de tension.

L'équation différentielle qui régit l'intensité du courant dans le circuit s'obtient par application de la loi de Lenz. On trouve

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + \left(R + 2\frac{dL}{dt}\right)\frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C} + \frac{d^2 L}{dt^2}\right)i = E\omega\cos\omega t.$$

Cette équation n'est pas intégrable. Recherchons une solution approchée dans le cas des faibles amplitudes. Supposons le pendule animé d'un mouvement sinusoïdal de faible amplitude et posons que la modulation de la self est de la forme

$$L(1 + \varepsilon\sin\alpha t), \quad \text{avec} \quad x = x_0 \sin\alpha t.$$

Prenons ε comme infiniment petit principal.

L'équation écrite plus haut devient dans le cas particulier actuel

$$L(1 + \varepsilon\sin\alpha t)\frac{d^2 i}{dt^2} + (R + 2L\varepsilon\alpha\cos\alpha t)\frac{di}{dt} + \left[\frac{1}{C} - L\varepsilon\alpha^2\sin\alpha t\right]i = E\omega\cos\omega t.$$

Posons $i = i_1 + i_2$, i_1 étant *a priori* solution de l'équation

$$L\frac{d^2 i_1}{dt^2} + R\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C}i_1 = E\omega\cos\omega t.$$

Négligeons les termes du second ordre; on a une équation intégrable; on en tire

$$\begin{aligned} i_2 = {} & P(-\alpha)\cos[(\omega - \alpha)t + \varphi] + Q(\alpha)\sin[(\omega - \alpha)t + \varphi], \\ & - P(\alpha)\cos[(\omega + \alpha)t + \varphi] - Q(\alpha)\sin[(\omega + \alpha)t + \varphi]. \end{aligned} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega},$$

en posant

$$P(\alpha) = \frac{L\varepsilon EC^2\omega(\omega + \alpha)^2[1 - LC(\omega + \alpha)^2]}{2D[D(\alpha)]^2}, \qquad Q(\alpha) = \frac{L\varepsilon EC^3 R\omega(\omega + \alpha)^3}{2D[D(\alpha)]^2},$$

avec

$$D = \sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2} \qquad D(\alpha) = \sqrt{[1 - LC(\omega + \alpha)^2]^2 + [RC(\omega + \alpha)]^2}.$$

En remplaçant par leur valeur i_1 et i_2 dans l'expression de la force, et en

négligeant les termes du second ordre, on trouve que la force a une composante en phase avec la vitesse, soit

$$F = \frac{EC\omega}{2D}\frac{dL}{dx}[Q(-\alpha) - Q(\alpha)]\cos\alpha t,$$

ce qui conduit, en appelant f le coefficient d'amortissement du pendule, et en tenant compte des relations

$$Q(-\alpha) - Q(\alpha) = -2\alpha\left(\frac{dQ}{d\alpha}\right)(0), \qquad \varepsilon = \frac{x_0}{L}\frac{dL}{dx},$$

à trouver l'expression du seuil de tension

$$E^2 = -\frac{2f[(1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2]^3}{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 RC^4\omega^4[(1-LC\omega^2)(3+LC\omega^2) + (RC\omega)^2]}.$$

Comme on le voit, pour que l'entretien soit possible, il faut que L soit supérieur, non à la valeur de résonance $1/C\omega^2$, mais à une valeur supérieure, $(1/C\omega^2)\left[-1+\sqrt{4+(RC\omega)^2}\right]$ qui en est voisine si la surtension du circuit est élevée. Sans que nous puissions pour le moment préciser le mécanisme de ce phénomène, il apparaît que la modulation de la phase au voisinage de la résonance contribue à amortir le pendule.

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX. — *Sur l'influence de la forme et des dimensions de l'éprouvette sur le résultat des essais de fatigue.* Note (1) de M. **Pierre Laurent**, présentée par M. Albert Portevin.

L'introduction de la limite de fatigue dans les calculs de la résistance des pièces en service s'est, depuis longtemps, révélée décevante. On ne peut affirmer qu'il n'y aura pas rupture pour une pièce dont les contraintes sont inférieures à la limite de fatigue déterminée sur éprouvette normalisée. En réalité, la limite de fatigue dépend de la forme et des dimensions des éprouvettes, comme l'ont constaté de nombreux auteurs. Si f est la limite de fatigue calculée à partir des formules de la résistance des matériaux et f_t la limite de fatigue en traction-compression, l'expérience montre que $(f-f_t)/f$ est une fonction linéaire de l'inverse des dimensions de l'éprouvette [*fig.* 1 tracée à partir des résultats de Buchmann (2) sur un alliage Élektron]; des conclusions analogues sont valables pour les aciers, comme le montre l'interprétation des résultats publiés notamment par Moore et Jaspar (3), Morokin et Moore (4).

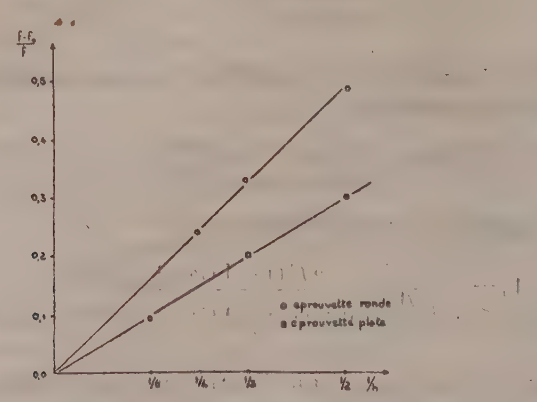
(1) Séance du 3 mars 1947.

(2) D'après Beck, *Technology of magnesium*, *Trad. Londres*, 1940.

(3) Cité par Peterson, *Experim. Stress Analysis*, 1, p. 118.

(4) *A. S. T. M.*, 1944, p. 137.

Aucune des théories admises jusqu'à présent ne permet d'expliquer ces résultats; nous nous proposons, dans cette Note, de montrer que la théorie de la consolidation de tensions en fournit la justification.



Variation de $\frac{f-f_t}{f}$ en fonction de l'inverse du diamètre (ou de l'épaisseur) sur éprouvette ronde en flexion rotative (ou sur éprouvette plate en flexion alternée). D'après les résultats de Buchmann sur alliage Elektron.

D'après cette théorie, on peut admettre ([5]) que la force nécessaire pour produire une déformation donnée peut se décomposer en :

1° La force F_c nécessaire pour déformer les différents cristaux supposés indépendants les uns des autres;

2° La force F_t nécessaire pour tenir compte des interactions cristallines (consolidation de tension).

D'après Dehlinger, dans les phénomènes de fatigue, F_t passe par un maximum en fonction de la charge appliquée. On peut montrer que la limite de fatigue est égale à la contrainte f_t correspondant à ce maximum, c'est-à-dire que la limite de fatigue est liée aux interactions cristallines. Ceci explique pourquoi les limites de fatigue ne suivent pas les règles usuelles de la résistance des matériaux.

Pour expliquer, par cette théorie, l'influence des dimensions et de la forme de l'éprouvette en flexion, considérons, pour simplifier, que les cristaux ont une même dimension δ et sont répartis en couches parallèles à l'axe de l'éprouvette. La couche extérieure de l'éprouvette d'épaisseur δ supposée séparée du reste de l'éprouvette subira des déformations de traction et compression; par suite des interactions des différents cristaux de cette couche, la limite de fatigue de celle-ci en traction est f_t. L'interaction de cette couche et du reste de l'éprouvette lui donne une certaine courbure que l'on peut reproduire en exerçant sur cette couche un couple de flexion $\mathfrak{M}$; la contrainte dans la fibre

([5]) P. Laurent, *Rev. Métallurgie*, 1945, p. 230.

extérieure de cette couche est alors $(\mathfrak{M}/J)\varepsilon$, ε étant la distance de la fibre extérieure à la ligne neutre de cette couche externe et J son moment d'inertie. Cette interaction s'ajoute aux interactions de cristaux de la couche δ; par suite, lorsque la limite de fatigue est atteinte, la contrainte correspondant à la consolidation de tension dans la fibre extérieure est : $f_t + (\mathfrak{M}/J)\varepsilon$. Si f est la limite de fatigue de l'éprouvette calculée par la formule classique $f=(M/I)v$, on a : $f=f_t+(\mathfrak{M}/J)\varepsilon$. Mais, comme au cours de la flexion, les plans normaux à l'axe restent normaux à la ligne neutre : $\mathfrak{M}/J = M/I = f/v$.

D'où,

$$f = f_t + \frac{f}{v}\varepsilon, \qquad \frac{f-f_t}{f} = \frac{\varepsilon}{v}.$$

Le raisonnement précédent indique que la limite de fatigue en un point n'est pas déterminée uniquement par les contraintes en ce point et qu'il faut tenir compte du gradient de la déformation.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur une condition mathématique permettant de limiter à quatre le nombre de composantes de la fonction d'onde de Dirac.* Note [1] de M. **Georges Bodiou.**

Dans son livre sur les *Particules à Spin*, M. L. de Broglie s'exprime ainsi : « M. Dirac a montré que l'on devait prendre au moins 4 fonctions Ψ_k, et il a admis qu'on devait se borner à 4 » (p. 62). Nous nous proposons de caractériser mathématiquement cette limitation.

I. La densité de probabilité de la variable continue x est

$$\rho(x) = \sum_i \left|(xa_i|)\right|^2,$$

où les a_i sont les valeurs propres discontinues d'un opérateur α.

Soit β un opérateur à valeurs propres b_j lié stochastiquement à α

$$(xb_j|) = \sum_i (b_j|a_i)(xa_i|).$$

$$\beta\overrightarrow{A_l} = \left[\sum_j (b_j|a_l)\, b_j (b_j|a_k)^*\right]\overrightarrow{A_k};$$

pour que $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$, il faut et il suffit que

$$\text{(I)} \qquad \left[(a_k + a_l)\sum_j b_j (b_j|a_l)(b_j|a_k)^* = 0\right],$$

---

[1] Séance du 24 février 1947.

donc ou bien $a_k + a_i = 0$, ou bien $\sum_j b_j (b_j | a_i)(b_j | a_k)^* = 0$ si $a_k + a_i \neq 0$, c'est-à-dire que $[\beta \vec{A}_i, \vec{A}_k] = 0$.

Donc il y a dégénérescence; on classe les $\vec{A}$ (et les $\vec{B}$) de telle sorte que la valeur propre liée à $\vec{A}_i$ soit $i/|i|$ ou $a_i/|a_i|$, on note $(b_j | a_i)$ par $(j | i)$. On suppose que α et β ont $2n$ directions propres : n pour la valeur propre $+1$ et n pour la valeur propre -1.

II. La condition d'anticommutation I devient alors

$$(\text{I}') \qquad \left(\frac{i}{|i|} + \frac{i'}{|i'|}\right) \sum_j \frac{j}{|j|} (j | i)(j | i')^* = 0.$$

Elle est vérifiée pour des i et des i' de signes contraires.

Il reste donc à satisfaire

$$-\sum_{j<0} (j | i)(j | i')^* + \sum_{j>0} (j | i)(j | i')^* = 0$$

pour des i, i' de même signe. Avec la condition d'orthogonalité de $\vec{A}_i$ et $\vec{A}_{i'}$ elle équivaut à

$$(a) \quad \sum_{j<0} (j | i)(j | i')^* = 0 \quad \text{et} \quad (b) \quad \sum_{j>0} (j | i)(j | i')^* = 0 \quad (i \neq i')$$

et i — i' de même signe.

Et dans le cas de $i = i'$ elle s'écrit (en la combinant avec la normalisation de $\vec{A}_i$)

$$(c) \qquad \sum_{j<0} |(j | i)|^2 = \sum_{j>0} |(j | i)|^2 = \frac{1}{2}.$$

Or

$$\vec{A}_i = \sum_{j<0} (j | i) \vec{B}_j + \sum_{j>0} (j | i) \vec{B}_j = \vec{A}_{i(-)} + \vec{A}_{i(+)}.$$

Les $\vec{B}_{(+)}$ constituent un sous-espace linéaire des $\vec{B}$; il en est de même des $\vec{B}_{(-)}$, ces deux sous-espaces étant disjoints et orthogonaux; les relations (a), (b) et (c) permettent d'énoncer ce qui suit :

Les $A_{i(+)}$ $(i > 0)$ et les $A_{i'(+)}$ $(i' < 0)$ constituent deux bases orthonormales (longueur $\sqrt{2}/2$) du sous-espace $\vec{B}_{(+)}$; les $A_{i(-)}$ $(i > 0)$ et $A_{i'(-)}$ $(i' < 0)$ constituent deux bases orthonormales du sous-espace $\vec{B}_{(-)}$. On doit y joindre la condition d'orthogonalité des $\vec{A}_i$ $(i > 0)$ et des $\vec{A}_{i'}$ $(i' < 0)$ pour avoir le système des conditions nécessaires et suffisantes d'anticommutation; cette orthogonalité équivaut à

$$[\vec{A}_{i(+)}, \vec{A}_{i'(+)}] + [\vec{A}_{i(-)}, \vec{A}_{i'(-)}] = 0.$$

III. On en déduit que déterminer 2 opérateurs anticommutants équivaut à déterminer 3 systèmes orthonormaux dans 3 espaces hermitiens à n dimensions; par exemple les $\overrightarrow{A}_{i(+)}$, les $\overrightarrow{A}_{i'(+)}$ et les $\overrightarrow{A}_{i(-)}$; donc un couple d'opérateurs anticommutants dépend de $3n^2$ paramètres réels.

IV. Trois opérateurs α, β, γ étant donnés, tels que γ anticommute avec α, pour qu'il anticommute avec β il suffit d'écrire l'orthonormalité des $C_{j(+)}(j>0)$ et la simple orthogonalité des $C_{j'(+)}(j'<0)$; il y a donc une infinité à n^2+n paramètres réels d'opérateurs γ anticommutant avec 2 opérateurs donnés α et β. L'ensemble de 3 opérateurs α, β, γ anticommutant deux à deux dépend donc de $4n^2+n$ paramètres réels.

V. Considérant alors 3 opérateurs α, β, γ anticommutant avec un quatrième δ et écrivant les conditions pour qu'ils anticommutent entre eux, on trouve que cet ensemble de 4 opérateurs anticommutants deux à deux dépend de $3n^2+3n$ paramètres réels.

Si l'on veut qu'il n'y ait pas à particulariser le trio des α, β, γ anticommutant entre eux, pour qu'il puisse appartenir au quatuor α, β, γ, δ, anticommutant également deux à deux, il faut :

$$3n^2+3n \geqq 4n^2+n \quad \text{ou} \quad n \leqq 2.$$

Sachant déjà qu'il faut au moins $n=2$, on voit que c'est la seule valeur satisfaisant à la condition énoncée; il reste à en dégager la signification physique; ce sera l'objet d'une seconde Note.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur la troisième loi de Képler dans l'attraction éclairée*. Note de M. **Constantin Popovici**, présentée par M. Jean Chazy.

Dans des travaux qui datent de 1923, nous avons considéré la loi du mouvement d'une planète soumise à l'attraction éclairée du Soleil, c'est-à-dire soumise à l'attraction newtonienne du Soleil de laquelle on retranche la répulsion de la lumière, et nous sommes arrivé pour cette loi de force à l'expression [1]

$$(1) \qquad F=-\frac{k}{r^2}\left(1+\varepsilon\frac{dr}{dt}\right), \qquad k=A-R, \qquad \varepsilon=\frac{R}{c(A-R)};$$

A désigne l'attraction et R la répulsion à l'unité de distance, c la vitesse de la lumière. Une telle force ne conserve pas l'énergie, et la trajectoire tend vers un cercle. En effet, M. Chazy a donné [2] la comparaison suivante : le mouvement (dans le vide) est de même nature cinétique que le mouvement d'*un pendule*

---

(1) *Bull. astron.*, **3**, 1923, pp. 258-263. M. Armellini a proposé la loi (1) pour remplacer la loi de Newton (*Rendiconti Lincei*, 1937, passim).

(2) *Comptes rendus*, **209**, 1939, p. 138; **210**, 1940, p. 713; *Bull. astron.*, **12**, 1940, pp. 89-97; *Journ. de Math.*, **19**, 1940, pp. 261-280.

dans un milieu résistant; le cercle limite de la trajectoire planétaire joue le rôle du point d'équilibre du pendule.

Nous avons démontré [3] que l'énergie consommée dans l'attraction éclairée *est finie* de $t = -\infty$ à $t = +\infty$, même si l'éclat du Soleil dure indéfiniment.

Nous allons démontrer une proposition analogue, que nous pouvons appeler le *théorème de la variation des siècles et des routes* :

La différence des nombres des révolutions de la planète avec la loi (1) *et avec la loi de Newton* ($\varepsilon = 0$) *est finie de* $t = 0$ *à* $t = +\infty$; *la différence des routes aussi est finie.*

Pour mieux approfondir la nature des choses, cherchons ce qui correspond à la troisième loi de Képler dans l'attraction éclairée. Nous avons dit en 1923 que, la loi (1) ne présentant pas une invariance, lorsque nous remplaçons les distances r par λr et le temps t par τt tels que $\lambda^3 = \mu\tau^2$ (μ constante), la troisième loi de Képler ne se conserve pas. Il y aura à chaque révolution un écart d'ordre ε. Cette proposition, malgré son évidence apparente, est inexacte : au contraire, sur chaque portion d'une trajectoire définie par la loi (1); la troisième loi de Képler garde sa validité.

Voyons d'abord ce qui correspond à la troisième loi de Képler dans le mouvement newtonien, lorsque cette loi ne paraît plus avoir de sens, comme cela se présente dans le mouvement parabolique ou hyperbolique, où l'on ne peut plus parler de *période de révolution*. Nous avons, pour $\varepsilon = 0$, avec les notations habituelles,

$$k/m = fm_0 = 4\pi^2 a^3/T^2 = C^2/p = ah.$$

Toutes ces égalités sont différentes expressions de la troisième loi de Képler. Elles symbolisent l'homogénéité. Si nous ne négligeons pas la pression de la lumière, mais si nous la considérons comme *instantanée*, nous aurons, avec les mêmes valeurs initiales C et h,

$$k'/m = fm'_0 = 4\pi^2 a'^3/T'^2 = C^2/p' = a'h; \quad m'_0 = m_0(1 - R/A).$$

Remarquons que cela donne $pa = p'a' = b^2$; d'où, *pour toutes les particules, la même valeur du petit axe.*

Dans le problème de n corps on peut considérer de même un demi-grand axe elliptique, parabolique ou hyperbolique, en posant $h = fm_0/a$.

Similitude. — Nous pouvons donner une autre interprétation de la troisième loi de Képler, comme conséquence de l'homogénéité. Soient deux systèmes de mêmes masses, dont les distances et les vitesses initiales se déduisent l'une de l'autre par multiplication respective par λ et λ/τ avec $\lambda^3 = \tau^2$: nous dirons que les deux systèmes sont en similitude. Leur évolution conserve invariable le

---

(3) *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 2052; **210**, 1940, pp. 39 et 138; **218**, 1944, p. 784; **219**, 1944, p. 114.

rapport des cubes des distances aux carrés des temps. Si l'un des systèmes revient à sa conformation originelle, il en sera de même de l'autre d'après la troisième loi de Képler.

Lorsque nous tenons compte de la vitesse de la lumière, pour $\varepsilon \neq 0$, l'expression de la force (1) ne jouit plus de l'homogénéité; cependant la troisième loi de Képler est satisfaite sur toute la trajectoire. En effet, la force étant centrale, la loi des aires est satisfaite; d'autre part la trajectoire est

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\eta}{p}\cos\left[\sqrt{1-\alpha^2}(\theta-\theta_0)\right], \quad \eta = \eta_0 e^{-\alpha\theta}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon k}{2C},$$

et comme p et C sont constants, il résulte que la troisième loi de Képler est satisfaite par chaque arc d'ellipse passant par cinq points voisins de la trajectoire.

Démontrons maintenant le théorème énoncé. La différence des temps de parcours de l'arc de la trajectoire et de l'arc de la circonférence limite $r = p$ correspondant à un même angle polaire, est donnée par l'intégrale

$$\frac{1}{C}\int_{\theta_0}^{\theta}(r^2-p^2)\,d\theta = \frac{p^2}{C}\int_{0}^{\theta}\left[\frac{1}{\left[1+\eta\cos\left[\sqrt{1-\alpha^2}(\theta-\theta_0)\right]\right]^2}-1\right]d\theta;$$

or, d'après l'expression $\eta = \eta_0 e^{-\alpha\theta}$, où α est positif, cette intégrale tend visiblement vers une limite finie quand la limite supérieure θ tend vers $+\infty$, puisque la fonction intégrée est le produit de η par un cosinus et par une quantité qui tend vers -2.

La différence des longueurs des deux mêmes arcs tend aussi vers une limite finie, car elle est donnée par l'intégrale

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\left[\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}-p\right]d\theta,$$

où la différence $r-p$, la dérivée $dr/d\theta$, et par suite l'expression entre crochets, sont de même les produits de la fonction η et de quantités bornées quand θ tend vers $+\infty$.

ANALYSE DIMENSIONNELLE. — *Sur la dimension des angles.* Note [1] de M. André Martinot-Lagarde.

Quand on écrit une formule de dimension, il est classique de poser que les angles sont sans dimension, sans indication complémentaire. Cela est correct parce qu'on sous-entend que les angles seront toujours par convention mesurés, comme les arcs trigonométriques, en radians. Mais cette manière de parler

(1) Séance du 3 mars 1947.

contient une contradiction; car, par définition même du mot dimension, toute grandeur qui peut être mesurée avec différentes unités a des dimensions.

La mesure d'un angle est égale au produit d'un nombre sans dimensions, le rapport des mesures de deux longueurs d'arc (ou le rapport de la longueur d'un arc à la longueur du rayon) *par un facteur arbitraire*. C'est d'une façon analogue que, par exemple, une masse spécifique est égale au rapport de deux masses multiplié par un facteur arbitraire, ou qu'une température absolue est le rapport de deux quantités de chaleur multiplié par un facteur arbitraire.

On pourrait répondre il est vrai que les angles, ainsi que les angles solides, se rapprochent des nombres abstraits et se distinguent de toutes les autres grandeurs de la façon suivante : chaque angle a des propriétés qui n'appartiennent à aucun autre angle, indépendamment de toute propriété spécifique ou générale de la matière ([2]); par exemple l'angle droit se distingue des autres angles en ce qu'il est égal à son supplément. Au contraire, une longueur n'a pas de propriété indépendante des propriétés de la matière.

Mais si l'on excepte toute propriété spécifique d'aucun objet ou d'aucun matériau, et qu'on considère seulement les propriétés générales de la matière et du vide, il est aisé de caractériser chaque longueur par une propriété qui la distingue des autres longueurs ([3]) : une longueur, dont la mesure dans tel système d'unités est L, est la longueur d'onde dans le vide d'une radiation de fréquence $\nu = c/L$; cette radiation est émise en photons d'énergie

$$W = h\nu = \frac{hc}{L},$$

la masse correspondant à cette énergie est $m = W/c^2 = h/cL$. Considérons deux masses, de même mesure m; Γ étant la constante de la gravitation, plaçons ces deux masses séparées l'une de l'autre par une distance L' telle que leur énergie de gravitation, $m^2/\Gamma L'$, soit égale à W. Le nombre sans dimension

$$\frac{L}{L'} = \frac{\Gamma c^3}{h} L^2,$$

ou plus commodément sa racine carrée, proportionnelle à L, caractérise la longueur considérée. On trouve

$$\sqrt{\frac{\Gamma c^3}{h}} = 247.10^{30} \quad \text{C.G.S.}$$

Cela revient d'ailleurs à présenter d'une façon un peu différente de celle d'Eddington son système d'unités naturel ([4]), où Γ, c et h sont mesurés par 1.

([2]) ABRAHAM, *Journal de Physique*, 3e série, **1**, 1892, p. 516.

([3]) L. de BROGLIE, *Matière et Lumière*, Paris, 1937.

([4]) *Report on Gravitation* (*Mond. Phys. Soc.*, 1918, p. 91).

Les longueurs se trouveraient alors des grandeurs sans dimensions, du fait qu'on aurait fixé une fois pour toutes leur unité. Elles le seraient au même titre que les angles quand on les mesure comme des arcs trigonométriques.

Or, en fait, on écrit usuellement les équations de la physique en les déclarant invariantes par rapport aux changements d'unités, et en disant que les angles sont sans dimensions; mais on ajoute par exemple que telle équation n'est valable que si l'unité d'angle est le tour.

THÉORIE DES VIBRATIONS. — *Sur le calcul approché de certaines sommes.* Note de M. **Théodore Vogel**, présentée par M. Joseph Pérès.

Lorsqu'on étudie par la méthode des coordonnées normales les vibrations de systèmes continus étendus dans n dimensions, la fonction d'état et les grandeurs qui en découlent, telles que l'énergie cinétique moyenne, se présentent sous la forme de séries infinies, où chaque terme est rattaché à l'une des vibrations propres du système par une fonction des n indices qui la caractérisent. En particulier, dans le cas des plaques et des membranes, $n=2$, et suivant le problème traité, les indices r et s peuvent prendre toutes les valeurs entières de 1 à ∞, ou toutes les valeurs impaires, etc. [1] [2]. De toutes façons, il s'agit de sommer les valeurs d'une fonction $F(r,s)$ continue par rapport à ses arguments, pour les points du plan de phase (r,s) qui sont les centres d'un quadrillage régulier dont la maille a une surface déterminée S ($S=4$, par exemple, si r et s sont assujettis à être de parité déterminée). En particulier, il pourra s'agir de sommer tous les termes correspondant à des pulsations propres comprises entre deux bornes ω et ω', ou tous ceux qui résonnent au voisinage d'une valeur donnée ω de la pulsation.

Dans le plan (r,s), les expressions des pulsations propres

$$\omega_{rs}(r,s)=\omega$$

représentent une famille de courbes de paramètre ω, qui partagent le premier quadrant en deux régions, dont l'une contient à la fois l'origine et toutes les courbes dont le paramètre est inférieur à ω. Si ω est suffisamment grand, l'aire de cette région *intérieure* peut être confondue avec une aire composée de mailles entières du quadrillage; d'autre part, F étant une fonction continue de r et s, il y a un point intérieur à la maille M où cette fonction a pour valeur la moyenne des valeurs affixes de tous les points M, soit

$$F(r_0,s_0)=\frac{1}{S}\iint_M F(r,s)\,dr\,ds,$$

(1) *J. de Physique*, 1946, p. 193.
(2) *Revue Scientifique*, 1946, p. 515.

et l'on pourra admettre avec une approximation généralement suffisante que ce point est le centre de M. Dès lors, la somme cherchée des valeurs de $F(r, s)$ étendue à tous les r, s compris entre les deux courbes ω et ω', vaudra approximativement

$$\sum_{\omega, \omega'} F(r, s) = \frac{1}{S} \iint_{\mathcal{S}} F(r, s)\, dr\, ds,$$

intégrale étendue à la surface $\mathcal{S}$ comprise entre les deux courbes $\omega_{rs} = \omega$ et $\omega_{rs} = \omega'$. Il est d'ailleurs licite, à l'approximation adoptée, d'évaluer cette intégrale de telle façon que l'on veut, et en particulier de la transformer en adoptant un système de coordonnées polaires dans le plan de phase, encore que l'élément d'aire n'ait plus la même forme qu'une maille.

Cette transformation sera notamment utile dans le cas des plaques et des membranes rectangulaires, où l'on a

$$\omega = K\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right) \qquad \text{ou} \qquad \omega = K\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

la substitution

$$r = aR\cos\theta, \qquad s = bR\sin\theta$$

transformera alors $\mathcal{S}$ en une portion d'anneau circulaire comprise entre deux rayons vecteurs. Si les plus petites valeurs permises pour r et s sont égales à 1, par exemple, les limites d'intégration en θ seront alors arc sin $(1/bR)$ et arc cos $(1/aR)$, soit sensiblement, pour R grand, arc tg $(1/bR)$ et arc cotg $(1/aR)$. On pourra souvent séparer les variables et mettre F sous la forme $G(R).H(\operatorname{tg}\theta)$: c'est ce qui s'est constamment produit dans les problèmes rencontrés dans les publications citées ci-dessus. Alors

$$\sum_{\omega, \omega'} F(r, s) = \frac{1}{S} \int_{R}^{R'} G(R)\, R\, dR \int_{\frac{1}{bR'}}^{aR'} H(\operatorname{tg}\theta) \frac{d\operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}.$$

Lorsqu'on cherche la valeur de $\Sigma F(r, s)$ pour toutes les vibrations propres *voisines* de ω, il faut définir la largeur de la bande de voisinage. Nous l'avons choisie telle que les bandes correspondant à des centres de mailles voisines soient sensiblement contiguës : par exemple, lorsque r et s sont assujettis à être de parité déterminée, l'incrément de R, lorsqu'on passe d'un point au voisin, est $1/a$ ou $1/b$ suivant la direction adoptée; nous prenons alors la moyenne géométrique $1/\sqrt{ab}$ pour largeur de la bande de voisinage.

A titre d'exemple, considérons la transparence de la plaque carrée de côté $\sqrt{ab}$, problème traité dans le Mémoire cité [1] : nous sommes alors amenés à

calculer $\sum\limits_{\omega}\left(\frac{1}{r^2 s^2}\right)$. La méthode ci-dessus donne immédiatement

$$\sum_{\omega}\frac{1}{r^2 s^2}=\frac{ab}{4}\int_{\mathrm{R}}^{\mathrm{R}+\frac{1}{\sqrt{ab}}}\int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{ab}\,\mathrm{R}}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{ab}\,\mathrm{R}}\frac{\mathrm{R}\,d\mathrm{R}\,d\theta}{a^2 b^2 \mathrm{R}^4 \sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{ab}{4}\left[\frac{1}{2\mathrm{R}^2}\right]_{\mathrm{R}}^{\mathrm{R}+\frac{1}{\sqrt{ab}}}\left(t-\frac{1}{t}\right)_{\frac{1}{\sqrt{ab}\,\mathrm{R}}}^{\sqrt{ab}\,\mathrm{R}}$$

$$=\frac{1}{8ab}\,\frac{\frac{2\mathrm{R}}{\sqrt{ab}}+\ldots}{\mathrm{R}^4+\ldots}\,(2\sqrt{ab}\,\mathrm{R}+\ldots)=\frac{1}{2ab\mathrm{R}^2}=\frac{\mathrm{K}}{2ab\omega}.$$

C'est bien l'expression que nous avions trouvée par une autre méthode d'approximation. Le même procédé, appliqué à la fonction $\mathrm{F}=1/r^2 s^2 \omega_{rs}^6$, nous a permis de calculer la transparence d'une double paroi formée d'une plaque et d'une membrane [2].

THÉORIE DE LA CHALEUR. — *Le calcul des indices d'amortissement et de promptitude thermique des murs.* Note [1] de M. **Philippe Marmet.**

Pour caractériser le comportement d'un mur à l'égard des variations de la température extérieure, on considère son indice d'amortissement et sa promptitude thermique.

Ces notions se définissent en supposant que les variations de température extérieures sont sinusoïdales, de période 24 heures et d'amplitude égale à l'unité. Elles entraînent des variations de température de la face interne du mur également sinusoïdales et de période 24 heures, mais d'amplitude $\mathrm{A}<1$, et en retard sur les variations extérieures.

Par définition, A est l'indice d'amortissement du mur. Le retard peut être appelé indice de promptitude thermique. L'ensemble de ces deux grandeurs constitue un vecteur $\vec{\mathfrak{A}}=\mathrm{A}\underline{|\alpha}$ dont la présente Note a pour but d'indiquer un mode de calcul.

La chaleur qui traverse un mur se propageant dans une direction unique, l'hypothèse de Fourier et l'équation qui en résulte s'écrivent :

$$\mathrm{Q}=-\lambda\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \tau}=\frac{\lambda}{cd}\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2},$$

Q étant le flux de chaleur, λ la conductibilité, c la chaleur spécifique, d la densité et $\partial\mathrm{T}$ la différence de température produite pendant le temps $\partial\tau$ entre deux isothermes distantes de ∂x.

---

[1] Séance du 3 mars 1947.

En introduisant la résistivité thermique $R_1 = 1/\lambda$ et la capacité thermique par unité de volume $C_1 = cd$, ces équations deviennent :

$$QR_1 = -\frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -C_1 \frac{\partial T}{\partial \tau}.$$

Ces relations sont identiques aux équations des télégraphistes relatives aux lignes électriques sans self, le flux de chaleur Q jouant le rôle du courant, et la température T le rôle de la tension.

En conséquence, lorsqu'un corps est traversé par un flux de chaleur se propageant dans une seule direction, ce corps constitue une ligne thermique pour laquelle on peut définir une impédance caractéristique Zc et une constante de propagation γ données par les mêmes formules que pour les lignes électriques sans self :

$$\vec{Z}c = \sqrt{\frac{R_1}{C_1 \omega j}}, \qquad \vec{\gamma} = \sqrt{R_1 C_1 \omega j}.$$

En fonction des constantes primaires des matériaux (conductibilité λ, chaleur spécifique c, densité d) et pour la pulsation $\omega = (2\pi/24) = 0,261$, l'impédance caractéristique et la constante de propagation s'expriment par

$$\vec{Z}_c = \frac{2}{\sqrt{\lambda c d}} \Big| -\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{\lambda}} \Big| +\frac{\pi}{4}.$$

Un mur composé de n couches de matériaux d'épaisseur $e_1 \ldots e_k \ldots e_n$, constitue une suite de n lignes thermiques d'impédances caractéristiques $Zc_1 \ldots Zc_k \ldots Zc_n$ et de constantes de transfert $\theta_1 = \gamma_1 e_1 \ldots \theta_k = \gamma_k e_k \ldots, \theta_n = \gamma_n e_n$. Cette suite est fermée à ses extrémités sur des impédances Ze et Zi égales aux résistances thermiques de convection et de rayonnement des faces extérieure et intérieure du mur.

Le calcul de $\vec{\mathfrak{A}}$ peut se faire à l'aide de la loi d'Ohm généralisée, des équations classiques de la propagation et du calcul des réflexions. Celui-ci se fonde sur la méthode de Kennelly qui consiste à définir la réflexion à l'extrémité d'une ligne d'impédance caractéristique Zc fermée sur une impédance Z différente de Zc par le rapport $(Z/Zc) = \text{th}\, z$, z étant l'argument de réflexion.

En appelant $Za_1, \ldots, Za_k, \ldots, Za_n$ les impédances vues de *l'entrée* des couches successives, et $z_1, \ldots, z_k \ldots, z_n$ les arguments de réflexion *à la sortie* des mêmes couches, on obtient la formule

$$\vec{\mathfrak{A}} = \frac{Zi}{Ze + Za_1} \prod_{k=n}^{k=1} \frac{\text{ch}\, z_k}{\text{ch}(\theta_k + z_k)}.$$

Za_1 et z_k sont donnés de proche en proche par les formules :

$$z_n = \arg \operatorname{th} \frac{Zi}{Zc_n}, \qquad Za_n = Zc_n \operatorname{th}(\theta_n + z_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:$$
$$z_k = \arg \operatorname{th} \frac{Za_{k+1}}{Zc_k}, \qquad Za_k = Zc_k \operatorname{th}(\theta_k + z_k);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$z_1 = \arg \operatorname{th} \frac{Za_2}{Zc_1}, \qquad Za_1 = Zc_1 \operatorname{th}(\theta_1 + z_1).$$

Dans le cas d'un vide d'air de résistance Ra et de rang h, on peut admettre $Zc_h = \infty$, $\theta_h = 0$, d'où

$$z_h = 0, \qquad Za_h = Ra + Za_{h+1}, \qquad \frac{\operatorname{ch} z_h}{\operatorname{ch}(\theta_h + z_h)} = 1.$$

Le calcul numérique des indices d'affaiblissement s'effectue en traçant sur le topogramme des tangentes hyperboliques vectorielles (abaque Brown-Blondel) un *diagramme des arguments* qui donne les affixes de z_k et $\theta_k + z_k$. On lit sur l'abaque les modules des ch, ainsi que le module et la phase de $\operatorname{th}(\theta_1 + z_1)$, d'où l'on déduit Za_1.

Le calcul des indices de promptitude thermique s'effectue en reportant le diagramme sur le topogramme des cosinus hyperboliques et en lisant les phases correspondantes.

Cette méthode de calcul permet de comparer par leurs indices des murs de composition donnée et d'étudier l'efficacité des diverses couches d'un mur en fonction de leur nature, de leur épaisseur et de leur position. Elle facilite ainsi la recherche des matériaux à utiliser et la manière de les associer pour obtenir un résultat donné d'avance.

CHALEUR. — *Détermination de la relation entre la pression et la température d'ébullition correspondante.* Note de M. **D. Milosavlévić**, présentée par M. Aimé Cotton.

Nous nous proposons d'exposer une nouvelle méthode générale qui permet de trouver la liaison entre la pression p et la température d'ébullition correspondante T. Dans ce but nous utilisons l'équation de Clapeyron-Clausius

$$L = T(v'' - v') \frac{dp}{dT}, \tag{1}$$

qui est transformée en

$$d\left(\ln \frac{p}{T}\right) = y \frac{1}{T} dT \tag{2}$$

en posant

$$y = \frac{L - p(v'' - v')}{p(v'' - v')}. \tag{3}$$

Pour intégrer l'équation (2) nous avons d'abord essayé sans succès d'exprimer y en fonction de T. Enfin nous avons réussi à trouver la relation linéaire entre y et la quantité z

$$z = \ln x - x \quad \text{et} \quad x = \frac{p}{p_k}\frac{T_{k'}}{T}, \tag{4}$$

où p_k désigne la pression critique et $T_{k'}$ la température absolue du point triple. Cette liaison entre y et z est donnée par l'équation

$$y = b - mz, \tag{5}$$

où b et m représentent des constantes positives relatives à la substance étudiée. Par exemple, pour H_2O, $m = 1,39$ et $b = 4,3$; pour CO_2, $m = 1,69$ et $b = 4,1$.

En tenant compte de (4) et (5), l'équation (2) prend la forme

$$\frac{d(\ln x)}{b - m(\ln x - x)} = \frac{dT}{T}, \tag{6}$$

équation différentielle du premier ordre avec des variables séparées. On peut souvent négliger le terme x; par exemple, on a pour l'eau

t(°C).	y.	x.	$\ln x$.	z.
0	18,76	0,000	−10,50	−10,50
20	17,08	0,000	− 9,22	− 9,22
40	15,67	0,000	− 8,14	− 8,14
60	14,38	0,001	− 7,21	− 7,22
80	13,28	0,002	− 6,40	− 6,40
100	12,36	0,003	− 5,69	− 5,69
140	10,68	0,011	− 4,55	− 4,56
180	9,42	0,027	− 3,60	− 3,63
200	8,88	0,041	− 3,20	− 3,24
240	8,02	0,081	− 2,52	− 2,60

Si la quantité x est négligeable devant $\ln x$, l'intégration de (6) donne l'équation

$$\ln\left(\frac{p}{p_k}\frac{T_k}{T}\right) = \frac{b}{m}\left[1 - \left(\frac{T_{k'}}{T}\right)^m\right] + \left(\frac{T_{k'}}{T}\right)^m \ln\left(\frac{p_{k'}}{p_k}\right), \tag{7}$$

qui est alors la relation cherchée entre la pression p et la température absolue d'ébullition correspondante T.

La méthode exposée peut être utilisée aussi pour déterminer la relation entre la pression p et la température de sublimation correspondante T.

OPTIQUE. — *Étude analytique du pouvoir réflecteur des métaux recouverts d'une ou deux couches minces transparentes.* Note [1] de M. **Florin Abelès**, présentée par M. Jean Cabannes.

Je me suis proposé d'examiner les possibilités d'augmenter le facteur de réflexion des métaux en les recouvrant de couches minces transparentes.

Le cas le plus simple est celui où l'on envisage une seule couche. Les formules générales [2] donnent dans ce cas particulier, en supposant l'incidence normale,

$$R_1 = \frac{r_1^2 + |r_2|^2 + 2r_1|r_2|\cos(\alpha_1 - \theta_2)}{1 + r_1^2|r_2|^2 + 2r_1|r_2|\cos(\alpha_1 - \theta_2)},$$

où nous avons posé

$$r_2 = \frac{n_1 - \nu_2 + i\chi_2}{n_1 + \nu_2 - i\chi_2} = |r_2|\,e^{i\theta_2}.$$

Une étude complète de R_1 nous a donné tous les renseignements nécessaires du point de vue pratique. Lorsque l'épaisseur de la couche est telle que $\alpha_1 - \theta_2$ soit multiple entier de π, R_1 est extremum. Il est maximum lorsque $\alpha_1 = \theta_2 + (2k+1)\pi$. Nous désignerons par δ_M l'épaisseur optique correspondante et par R_{1M} la valeur que prend R_1 dans ce cas. Nous supposerons le métal dans l'air, c'est-à-dire $n_0 = 1$. Dans ce cas on a toujours $R_{1M} > R_0$. Ainsi donc, avec une couche d'épaisseur convenable, on augmente toujours le facteur de réflexion du métal. Un autre paramètre dont nous disposons est l'indice de la couche. On trouve que $\partial R_{1M}/\partial n_1 > 0$; donc R_{1M} augmente lorsque n_1 augmente. R_{1M} est encore fonction des caractéristiques du métal, ν_2 et χ_2. On vérifie que $\partial R_{1M}/\partial \nu_2$ a le signe de $\nu_2^2 - (n_1^2 + \chi_2^2)$. $R_{1M} \to 1$ lorsque $\nu_2 \to 0$ et $\nu_2 \to \infty$. Il passe par un minimum pour $\nu_2 = (n_1^2 + \chi_2^2)^{1/2}$. Tous les autres paramètres restant les mêmes, R_{1M} est d'autant plus grand que le métal a un indice ν_2 plus faible [on n'aura jamais $\nu_2 > (n_1^2 + \chi_2^2)^{1/2}$]. On a aussi $\partial R_{1M}/\partial \chi_2 > 0$, ce qui veut dire que, toutes choses égales d'ailleurs, on a un facteur de réflexion d'autant plus élevé que l'indice d'extinction du métal recouvert est plus élevé.

Quelques résultats numériques donneront une idée des résultats que l'on peut obtenir avec une couche d'indice $n_1 = 2{,}4$ et d'épaisseur optimum. Argent ($\nu_2 = 0{,}18$; $\chi_2 = 3{,}67$ pour $\lambda = 0^\mu{,}589$); $R_0 = 0{,}95$; $R_{1M} = 0{,}97$. Aluminium ($\nu_2 = 0{,}81$; $\chi_2 = 5{,}47$ pour $\lambda = 0^\mu{,}5461$); $R_0 = 0{,}902$; $R_{1M} = 0{,}914$. Chrome ($\nu_2 = 3{,}56$; $\chi_2 = 4{,}6$); $R_0 = 0{,}66$; $R_{1M} = 0{,}68$.

Ces résultats montrent qu'avec les substances dont nous disposons on ne peut espérer augmenter sensiblement le facteur de réflexion des métaux. En échange, ce procédé permet d'empêcher l'oxydation et plus généralement l'attaque des métaux dont sont formés les miroirs au contact de l'air.

---

(1) Séance du 3 mars 1947.

(2) *Comptes-rendus*, **223**, 1946, pp. 891-893.

Le cas le plus simple après celui-là est celui d'un métal recouvert de deux couches minces transparentes d'indices différents. Si l'incidence est normale, les formules générales ([2]) montrent que

$$R_2 = \frac{A + B\cos\alpha_1 + C\cos(\alpha_2 - \theta_3) + D\cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \theta_3) + E\cos(\alpha_1 - \alpha_2 + \theta_3)}{F + B\cos\alpha_1 + C\cos(\alpha_2 - \theta_3) + D\cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \theta_3) + E\cos(\alpha_1 - \alpha_2 + \theta_3)},$$

où nous avons posé

$$A = r_1^2 + r_2^2 + |r_3|^2 + r_1^2 r_2^2 |r_3|^2, \qquad D = 2 r_1 |r_3|,$$
$$B = 2 r_1 r_2 (1 + |r_3|^2), \qquad E = 2 r_1 r_2^2 |r_3|,$$
$$C = 2 r_2 |r_3| (1 + r_1^2), \qquad F = 1 + r_1^2 r_2^2 + r_1^2 |r_3|^2 + r_2^2 |r_3|^2.$$

$$r_3 = \frac{n_2 - \nu_3 + i\chi_3}{n_2 + \nu_3 - i\chi_3} = |r_3|\, e^{i\theta_3}.$$

Comme dans le cas précédent, on trouve que R_2 présente des extrema lorsque les épaisseurs optiques sont telles que α_1 et $\alpha_2 - \theta_3$ soient des multiples entiers de π. On voit ainsi qu'il faut considérer quatre cas distincts : chacune des valeurs de $n_1 e_1$, $(2k+1)\lambda/4$ et $k'\lambda/2$ pouvant correspondre à l'une des valeurs de α_2, $\theta_3 + (2k''+1)\pi$ et $\theta_3 + 2k'''\pi$. L'étude analytique complète est bien plus compliquée que plus haut; nous donnerons ici simplement le résultat auquel on aboutit. Pour augmenter le facteur de réflexion R_0 des métaux, il faut les recouvrir de deux couches : la première d'épaisseur optique $(2k+1)\lambda/4$ et d'indice aussi fort que possible, et la deuxième d'épaisseur optique telle que $\alpha_2 = \theta_3 + 2k'\pi$ et d'indice aussi faible que possible. Quant au métal, on aura intérêt, comme dans le cas précédent, à prendre un métal d'indice ν_3 aussi faible que possible, et d'indice d'extinction χ_3 élevé. J'ai vérifié que si les épaisseurs sont choisies comme je viens de l'indiquer, et si $n_2 < n_1$, on a toujours $R_2 > R_0$. On aurait pu penser *a priori* que deux couches d'épaisseurs optiques telles que α_1 et $\alpha_2 - \theta_3$ soient multiples impairs de π donneraient le meilleur résultat, mais l'étude que j'ai faite montre que dans ces conditions on aura toujours, quels que soient n_1 et n_2, $R_2 < R_0$.

Voici quelques résultats numériques dans le cas où les métaux sont recouverts de deux couches transparentes d'indices $n_1 = 2,4$ et $n_2 = 1,35$. Nous donnons pour chaque métal deux valeurs de R_2 : la première correspond à deux couches telles que α_1 et $\alpha_2 - \theta_3$ soient multiples impairs de π; la deuxième, à deux couches dont la superficielle a une épaisseur optique $(2k+1)\lambda/4$, et la plus profonde est telle que $\alpha_2 = \theta_3 + 2k'\pi$. Argent : $R_2 = 0,771$; $R_2 = 0,986$. Aluminium : $R_2 = 0,559$; $R_2 = 0,969$. Chrome : $R_2 = 0,07$; $R_2 = 0,88$.

Donc avec deux couches transparentes convenablement choisies on peut obtenir une augmentation notable du pouvoir réflecteur des métaux.

ÉLECTROMAGNÉTISME. — *Sur la représentation matricielle des équations de Maxwell.* Note de M. **Jacques Baudot.**

Les quatre équations vectorielles de Maxwell, pour le vide et en l'absence de charges, peuvent être converties en une seule équation d'onde matricielle, en utilisant le tenseur électromagnétique réel $F_{\mu\nu}$ ($F_{\mu\mu} \equiv 0$, $F_{ij} = H_k$, $F_{i4} = E_i$),

$$\left[\frac{1}{c}\partial_t - \partial_i \mathfrak{A}_i\right]\overset{\ast}{F} = 0. \tag{1}$$

Les $\mathfrak{A}_i$ sont des matrices à 4 indices, réelles, et l'on a ainsi 16 équations dont 8 seulement sont distinctes.

On obtient trois matrices réelles, symétriques donc hermitiques ne comportant que deux éléments $\pm 1/2$ par ligne ou par colonne telles que

$$\mathfrak{A}_{\mu\nu,\rho\sigma} = \mathfrak{A}_{\rho\sigma,\mu\nu} = -\mathfrak{A}_{\nu\mu,\rho\sigma}.$$

Les divergences des champs sont données

$$\text{div}\,E \text{ par } \rho\sigma = 11 \text{ ou } 44, \qquad \text{div}\,H \text{ par } \rho\sigma = 22 \text{ ou } 33.$$

Nous conviendrons toujours d'ailleurs de considérer 4, 4 comme symétrique de 1, 1 et 3, 3 de 2, 2.

1° *Propriétés de ces matrices.* — Elles anticommutent entre elles et l'on vérifie aisément les trois propriétés remarquables,

$$\mathfrak{A}_i^3 = \mathfrak{A}_i, \qquad \mathfrak{A}_i^2\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_j\mathfrak{A}_i^2 = \mathfrak{A}_j, \qquad \mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_j + \mathfrak{A}_j\mathfrak{A}_i = 0.$$

C'est là le deuxième groupe de relations caractéristiques distingué par G. Petiau dans sa thèse sur le corpuscule de masse propre évanouissante [1].

Dans une Note sur le sujet qui nous occupe, G. Petiau avait trouvé les relations du premier groupe [2].

D'ailleurs les équations de condition restaient distinctes de ses équations d'ondes.

La matrice unité que l'on peut faire figurer devant $(1/c)\partial_t$ n'appartient pas au groupe ci-dessus, car elle commute. Nous l'appellerons

$$\gamma_1 = \| 1 \| = \delta_{\mu\nu,\rho\sigma} = \delta_{\mu\rho}\,\delta_{\nu\sigma}.$$

En établissant les formules fondamentales ci-dessus nous rencontrons la matrice $(\mathfrak{A}_i)^2$, indépendante de i, qui, dans le système des matrices $\mathfrak{A}_i$, joue le rôle d'unité. Soit $\gamma_2 = (\mathfrak{A}_i)^2$. On a $\gamma_2 = (1/2)(1 + \gamma_3)$, γ_3 jouant également le rôle d'unité. Explicitement

$$(\gamma_3)_{\mu\nu,\rho\sigma} = -\delta_{\mu\nu,\sigma\rho} = -\delta_{\mu\sigma}\,\delta_{\nu\rho}.$$

---

(1) G. Petiau, *Thèse*, Paris, 1936, p. 12.

(2) G. Petiau, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 1710.

Les γ satisfont à

$$(\gamma_2)^2 = \gamma_2, \qquad (\gamma_3)^2 = 1 = \gamma_1,$$
$$\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2, \qquad \gamma_1\gamma_3 = \gamma_3, \qquad \gamma_2\gamma_3 = \gamma_2 \quad (^3).$$

2° *Propagation du champ.* — Si

$$H = \mathfrak{A}_i\,\partial_i, \qquad H^2 = \mathfrak{A}_i^2\,\partial_{ii}^2 = \gamma_2\,\Delta, \qquad H^3 = H\,\Delta \quad (^2).$$

Ainsi

$$(\partial_4 - H)(\partial_4 + H) = \partial_{44}^2 + \gamma_2\,\Delta.$$

Ce qui ne diffère pas de $\square\vec{F}$, car γ_2 conserve également F.

3° *Transformation de l'opérateur d'évolution.* — L'opérateur $S = (1/c)\,\partial_t - H$ est hermitique, mais la quatrième matrice commute avec les trois autres. Elle peut d'ailleurs être indifféremment γ_1, γ_2 ou γ_3. Soit γ non précisée. Prenons alors la variable relativiste $x_4 = ict$.

L'opérateur d'évolution devient $S = (\gamma\partial_4 + i\mathfrak{A}_j\partial_j)$. Il n'est plus hermitique.

Nous rétablirons l'hermiticité en multipliant à gauche par une matrice $\mathfrak{A}_0$, commutant avec γ, anticommutant avec les $\mathfrak{A}_j$, ce qui suffit à assurer l'anticommutation de tous les B_μ. Cherchons à quelles conditions les B_μ satisferont le même groupe de relations que les $\mathfrak{A}_i$. On trouve aisément

$$\mathfrak{A}_0^3\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_i; \qquad \mathfrak{A}_0^3\gamma = \mathfrak{A}_0\gamma; \qquad \mathfrak{A}_0^3\gamma_2 = \mathfrak{A}_0\gamma.$$

Sans examiner plus loin la discussion des cas possibles, nous allons indiquer une matrice de même structure que les $\mathfrak{A}_i$, qui résout la question.

En fait c'est la matrice qui fait passer de $F_{\mu\nu}$ à $F^{\mu\nu}$, ce qui peut se comprendre aisément sur l'équation

$$\mathfrak{A}_0\left[-\gamma\frac{1}{c}\partial_t + \mathfrak{A}_j\partial_j\right]F_{\mu\nu} \equiv \left[-\gamma\frac{1}{c}\partial_t - \mathfrak{A}_i\partial_j\right](\mathfrak{A}_0F_{\mu\nu}) = 0.$$

Si l'on se reporte à la forme de $F_{\mu\nu}$ et $F^{\mu\nu}$, on voit d'après le changement de signe de l'opérateur H que $\mathfrak{A}_0F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$. On obtient donc en définitive

$$B_\mu\partial_\mu F = 0, \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned} &B_\nu^3 = B_\nu & & B_i = i\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_i,\\ &B_\nu^2B_\mu = B_\mu B_\mu^2 = B_\mu & \text{avec}\quad & B_4 = \gamma\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0,\\ &B_\nu B_\mu + B_\mu B_\nu = 0, & &\\ &\qquad B_\nu^2 = \gamma_2, & & \gamma B_\nu = B_\nu. \end{aligned}$$

Maintenant l'opérateur $S = B_\mu\partial_\mu$, hermitique, permet d'obtenir le Dalembertien par simple itération

$$S^2 = \gamma_2\square, \qquad S^3 \equiv S\square.$$

---

(3) On a $\gamma_2A = \gamma_3A \rightleftarrows \gamma_2A = A \rightleftarrows \gamma_3A = A$.

C'est cette dernière identité que G. Petiau a placée à la base de sa théorie du corpuscule de masse évanouissante.

Cette propriété appartient d'ailleurs à l'opérateur rotationnel.

4° *Propagation des potentiels.* — Si dans (1) on introduit l'expression du champ en fonction du potentiel $F_{\mu\nu} = [\partial_\mu, \varphi_\nu]$, les équations $(\mu, 4)$ seules non identiquement nulles donnent

$$\square \varphi_\mu + \partial_\mu \left(\partial_l \varphi_l - \frac{1}{c} \partial_t \varphi_4 \right) = 0$$

qui, dans l'hypothèse de Lorentz, se réduisent à $\square \varphi_\mu = 0$.

OPTIQUE ÉLECTRONIQUE. — *Sur l'aberration d'ellipticité des lentilles électrostatiques.* Note [1] de MM. **François F. Bertein** et **Édouard Regenstreif**, présentée par M. Camille Gutton.

Calcul de l'aberration. — Nous allons déterminer l'aberration optique créée par les imperfections de forme, c'est-à-dire essentiellement par l'ellipticité des lentilles électrostatiques [2]. Si l'on tient compte de ce défaut, la répartition de potentiel au voisinage de l'axe Oz et limitée au 2ᵉ ordre, est de la forme, en posant $s = re^{i\theta}$,

$$\Phi(rz\theta) = \Phi_0 - \frac{1}{4}\Phi''_0 s\bar{s} + \frac{1}{2}\left(\Psi_2 s^2 + \overline{\Psi}_2 \bar{s}^2\right)$$

(Φ_0, Ψ_2 fonctions de z respectivement réelle et complexe).

L'ellipticité est responsable du dernier terme. L'équation différentielle des trajectoires $s(z)$ s'en déduit par un calcul analogue à celui des systèmes rigoureusement de révolution

$$(1) \qquad \Phi_0 s'' + \frac{\Phi'_0}{2} s' + \frac{\Phi''_0}{4} s - \overline{\Psi}_2 \bar{s} = 0.$$

Soit un point objet sur l'axe, d'abscisse z_1, envoyant un faisceau étroit de demi-angle α; le faisceau émergeant s'appuie sur deux focales rectangulaires situées sur Oz. Dans le cas particulier où le défaut présente deux plans de symétrie se coupant sur cet axe (sections elliptiques de même orientation), les focales se trouvent respectivement dans chacun de ces plans.

La méthode classique de variation des constantes appliquée au terme correctif $-\overline{\Psi}_2 \bar{s}$ permet d'obtenir la figure d'aberration dans le plan d'abscisse z_2, conjugué de z_1 dans le système idéal : cette figure est un cercle; c'est donc la tache de moindre diffusion.

Nous donnerons l'expression du rayon ρ du conjugué de ce cercle dans

---

[1] Séance du 3 mars 1947.

[2] F. Bertein, *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 106; **224**, 1947, p. 560.

l'espace objet : c'est là *la limite de résolution imposée par l'ellipticité*

$$\rho = \alpha \left| [\Phi_0(z_1)]^{-\frac{1}{2}} \int_{z_1}^{z_2} [\Phi_0(z)]^{-\frac{1}{2}} \overline{\Psi}_2(z) [\mathrm{T}(z)]^2 \, dz \right|. \tag{2}$$

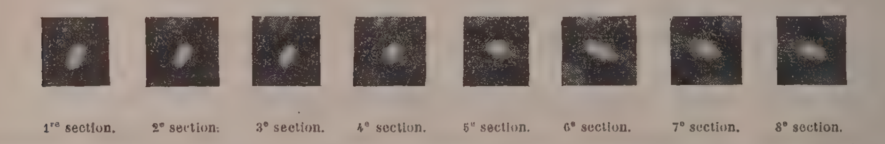
$\mathrm{T}(z)$ désigne ici la trajectoire de Gauss du système centré idéal, issue du point objet sous l'inclinaison $\pi/4$.

Nous pourrons évaluer ρ en fonction du défaut géométrique lui-même. Prenons le type de lentilles déjà envisagé ([3]) et fonctionnant comme objectif de microscope, l'ellipticité portant sur la pièce centrale : on connaît d'une part $\Phi_0(z)$ et $\mathrm{T}(z)$, d'autre part $\Psi_2(z)$ en fonction de $\delta_{\max}$ (1), d'où par substitution dans (2)

$$\rho = 5\,\delta_{\max}\,\alpha.$$

Si l'on remarque que la différence des deux axes de l'ellipse de gorge est $\Delta a = 4\delta_{\max}$, on peut écrire, les évaluations n'étant qu'approchées (1), $\rho = \Delta a . \alpha$.

Δa définit la constante de l'aberration d'ellipticité. Cette relation est valable, non pour une seule lentille, mais pour toute la famille des lentilles qui lui sont homothétiques. De façon générale, toute famille de ce genre donnerait $\rho = \mathrm{K}\Delta a \alpha$, K gardant la même valeur pour tous les échantillons.



1re section. 2e section. 3e section. 4e section. 5e section. 6e section. 7e section. 8e section.

Alors que les aberrations dites géométriques des systèmes centrés sont du troisième ordre, on notera que celle *d'ellipticité est du deuxième ordre*, d'où son importance pratique.

Vérification expérimentale. — L'existence de l'aberration d'ellipticité se trouve confirmée par des apparences de *flou orienté*, observées par P. Grivet sur des clichés agrandis provenant d'un microscope électronique insuffisamment diaphragmé. Suivant ce phénomène, les lignes présentant une certaine direction offrent une netteté maximum et si l'on fait varier la mise au point de façon à franchir le plan de visée optimum, cette direction se modifie de 90°. C'est là l'indice de l'ellipticité des faisceaux; les deux directions constatées sont celles des deux focales, indépendantes de la position du point objet dans son plan.

A l'aide d'un objet convenable, nous avons pu obtenir une image formée de petites taches lumineuses sur fond noir, ce qui correspond pratiquement à des faisceaux électroniques homocentriques isolés. Les clichés représentent des

([3]) H. Bruck, *Cahiers de Physique*, 24, 1944, p. 15 (lentille VIII).

sections successives d'un tel faisceau. Des mesures de ces sections on peut déduire le rayon du cercle de moindre diffusion relatif à l'ellipticité : on y parvient à l'aide de constructions géométriques simples fondées sur le fait que les systèmes à plan de symétrie font appel à des considérations d'optique de Gauss [4].

Nous avons pu déterminer ainsi la valeur de la limite de résolution imposée par l'ellipticité : $\rho \neq 6\,\mathrm{m}\mu$ pour l'ouverture $\alpha = 10^{-3}$, d'où il résulte que dans le cas envisagé l'on avait $\Delta a \neq 6\,\mu$. Ces considérations supposent que l'aberration d'ellipticité du microscope est due uniquement à la pièce centrale de son objectif; une inspection plus détaillée montrerait que ce dernier en fournit effectivement la partie principale. L'ordre de grandeur obtenu indique d'autre part qu'il y a lieu *de faire figurer cette aberration au même titre que les autres dans les discussions concernant le pouvoir séparateur.*

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Les particules légères accompagnant la désintégration* β. Note [1] de M. **Jean Thibaud**, présentée par M. Maurice de Broglie.

J'ai avancé l'hypothèse de l'existence de particules subélectroniques [2] comme étant la seule qui semblait devoir expliquer certaines concentrations énergétiques photographiées dans de multiples conditions (2000 clichés) : voici des précisions supplémentaires.

1. Pour déceler des porteurs d'énergie de masse nécessairement petite vis-à-vis de celle de l'électron, j'ai recherché une méthode susceptible de mettre en évidence un éventuel moment magnétique de ceux-ci, tout en évitant les objections que le principe d'incertitude impose à toute mesure directe de moment dans une expérience de type Stern-Gerlach; il sera donc indiqué de s'adresser à l'énergie que peut présenter une particule douée de moment magnétique en présence d'un champ non homogène. On fixe ainsi, pour une topographie déterminée du champ magnétique, un niveau d'énergie magnétique qui constituera pour la particule une zone de stabilisation. Le domaine du champ est alors comparable à un milieu dispersif à indice très rapidement variable pour les ondes particulaires, en sorte que les particules auront tendance à glisser et à se concentrer le long des surfaces où l'indice se rapproche de l'unité. En recherchant les sections planes de ces surfaces par des films photographiques, on doit déceler ces concentrations.

2. En fait les arcs et les lignes des deux types que j'ai mentionnés [2], dont

---

[4] M. Cotte, *Recherches sur l'Optique électronique*, Thèse, 1938.

[1] Séance du 17 février 1947.

[2] *Comptes rendus*, **223**, 1946, p. 984.

on trouvera ici quelques reproductions, manifestent bien les caractéristiques voulues. Susceptibles de présenter une grande finesse (*fig.* 4 et 5), alors même que la valeur du champ décroît, ils possèdent cependant une forte pénétration dans les écrans matériels. Cette pénétration croît avec l'intensité du champ et peut dépasser largement la limite acceptable pour les rayons β les plus durs (*fig.* 1 et 2; en 2, écran aluminium de 1,25 g/cm²; on notera l'effet de diffusion dans l'épaisseur de l'écran).

3. Une modification appropriée du champ magnétique m'a permis d'obtenir le résultat curieux de la figure 6 : la séparation en quatre raies indiquerait que plusieurs valeurs discrètes du moment magnétique seraient possibles. L'écartement des raies conduirait à prévoir l'existence de masses m_0 multiples, plutôt qu'une pluralité de valeurs du spin.

4. Le dessin 3, enfin, correspond à une figure d'interférences obtenue dans des conditions un peu différentes de celles reproduites dans la Note antérieure [2] : elle conduirait à attribuer au moment magnétique une valeur plus petite que celle indiquée [2], quoique encore très supérieure au magnéton de Bohr.

5. Dans des expériences totalement différentes, une direction déterminée de vitesse initiale est imposée au rayonnement au moyen de canaliseurs : on obtient alors des enroulements de trajectoire anormaux, montrant que les particules sont susceptibles de gagner ou de perdre de l'énergie en traversant les zones à gradient intense. Par ailleurs la particule paraît subir une perte d'énergie appréciable par unité de longueur de parcours, perte due sans doute à un rayonnement particulaire qui n'est plus négligeable comme dans le cas de l'électron.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur les anneaux doubles du phosphate de baryum.* Note [1] de Mlle SUZANNE VEIL, présentée par M. Charles Mauguin.

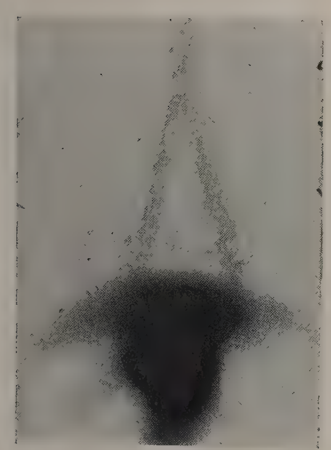
Les anneaux multiples, signalés [2] à propos de la précipitation du chromate d'argent au sein de la gélatine, ne constituent pas un exemple isolé. Notamment les présentes études, sur la précipitation du phosphate de baryum, ont conduit à l'observation d'anneaux doubles.

L'apposition de chlorure de baryum sur de la gélatine imprégnée de phosphate disodique donne lieu, dans des circonstances appropriées, à une succession d'anneaux doubles, tels que ceux reproduits (voir figure). Au microscope, les deux composants de chaque anneau double se révèlent très analogues, résolubles en cristaux accumulés.

---

[1] Séance du 3 mars 1947.

[2] *Comptes rendus*, **223**, 1946, p. 84; **224**, 1947, p. 113.



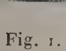


Fig. 1.

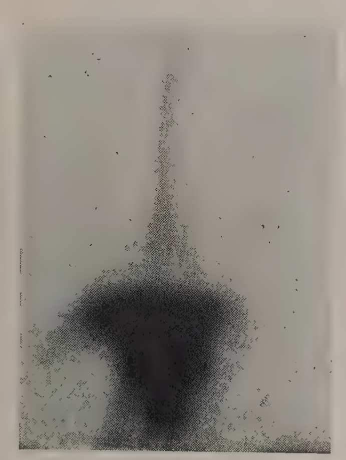


Fig. 2.

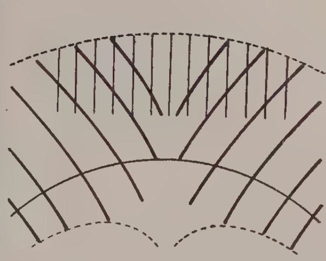


Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 5.

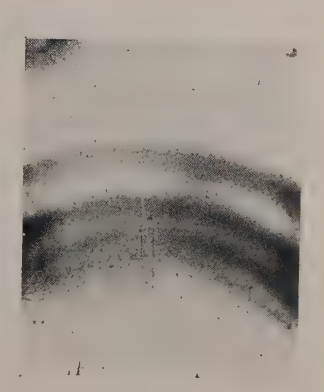
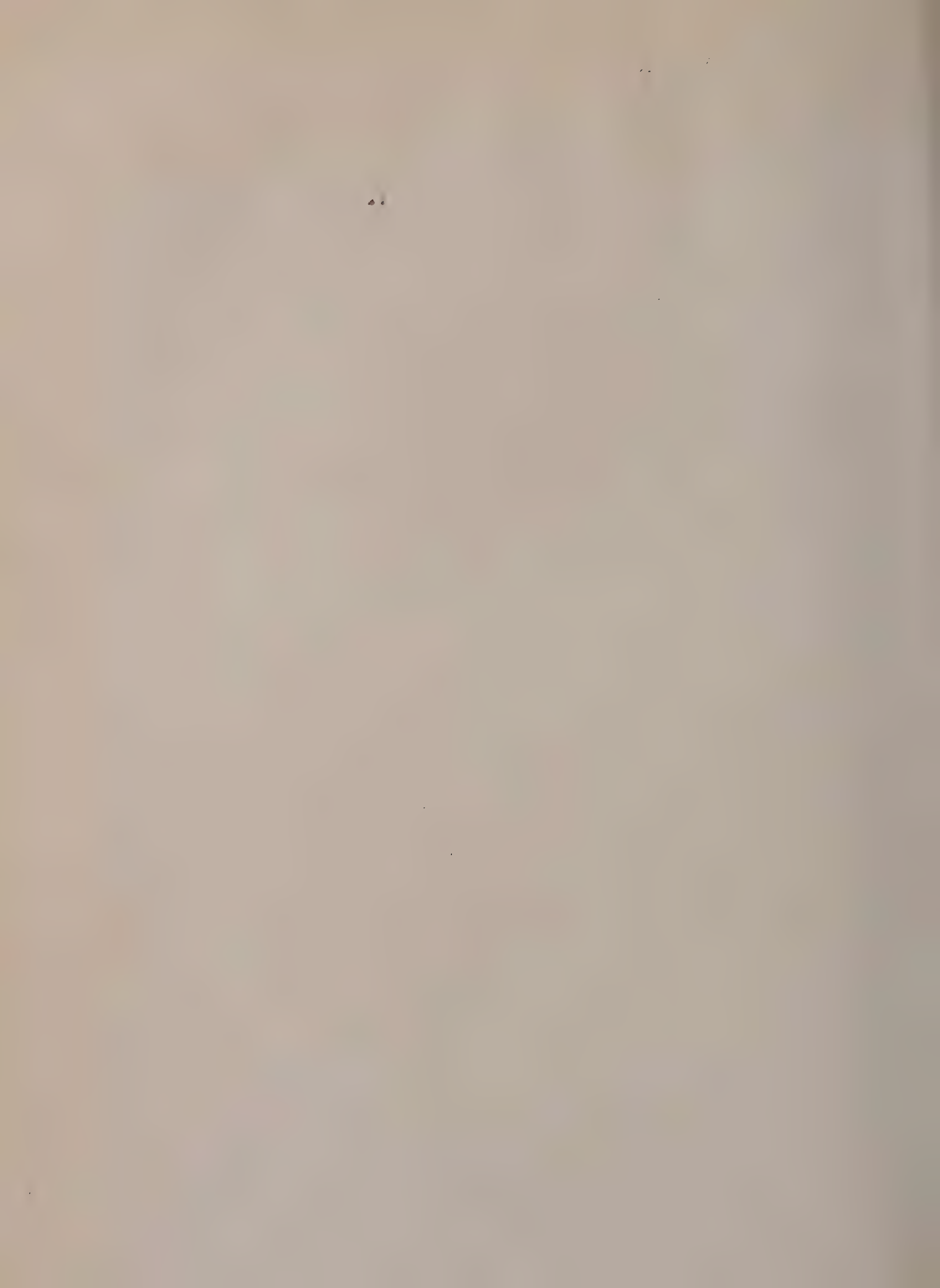
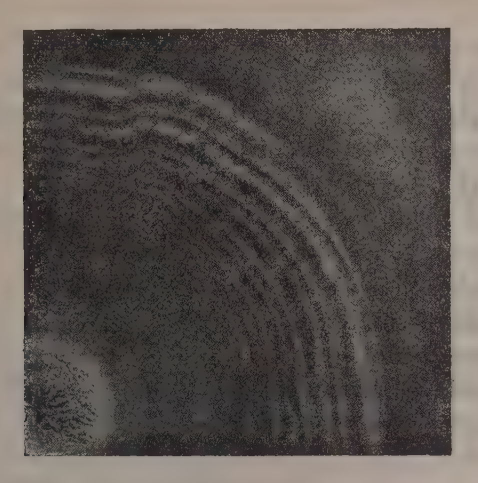


Fig. 6.



Dans des conditions opératoires moins restreintes, le composant interne des anneaux doubles conserve seul son aspect cristallin, tandis que son compagnon a emprunté une apparence laiteuse.



Anneaux doubles du phosphate de baryum.

Si l'on s'éloigne encore plus des conditions optima, les anneaux devenus laiteux finissent par s'évanouir. La rythmicité, désormais, se manifeste simple. Puis les anneaux qui subsistent perdent à leur tour leur aspect cristallin, jusqu'à ce qu'enfin toute rythmicité ait cessé d'être perceptible.

Précisément, comme pour le chromate d'argent, les présentes expériences sur le phosphate de baryum suggèrent que dans un seul et même précipité, une phase cristalline est susceptible de s'accompagner d'une phase précristalline. Les phases sont localisables dans des rythmicités distinctes : rythmicités non indépendantes cependant, la seconde constituant une sorte de satellite ou d'harmonique de la première.

Des conclusions du même ordre ont été dégagées, par ailleurs, de l'observation de rythmicités complexes encore que différentes, dans des études parallèles sur le pyrophosphate et sur le carbonate de baryum.

Les discriminations de phases, dans les gels en couche mince, sont évidemment facilitées dans une large mesure, lorsque la rythmicité des processus permet aux formations coexistantes de se répartir, en plages séparées, dans les lacunes les unes des autres.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Cémentation de certains alliages sidérurgiques par le glucinium.* Note de M. **Joseph Laissus**, présentée par M. Pierre Chevenard.

Poursuivant mes travaux sur la cémentation du fer, des aciers au carbone et du nickel par le glucinium [1], j'ai étudié par les mêmes techniques la diffusion de cet élément dans certains produits sidérurgiques. La présente Note concerne les résultats obtenus sur l'acier inoxydable à 13 % Cr et sur l'austénite à 18 % Cr et 8 % Ni.

1° *Mécanisme de la diffusion.* — D'une manière générale, la diffusion du glucinium dans ces deux alliages s'effectue d'après le même mécanisme. On constate la formation successive de cinq zones.

1° Zone de solution solide;
2° Zone hypoeutectoïde;
3° Zone eutectoïde (solution solide et combinaison);
4° Zone hypereutectoïde;
5° Zone de combinaison.

Ces résultats sont analogues à ceux qui ont été précédemment observés dans la cémentation du nickel par le glucinium.

2° *Influence de la température et du temps de cémentation.* — Le tableau ci-dessous résume les principales constatations relatives à l'influence de la température et de la durée de cémentation. Il faut noter que les épaisseurs de cémentation sont beaucoup plus faibles dans l'acier à 13 % Cr que dans l'austénite 18/8.

Épaisseurs moyennes en millimètres des zones cémentées obtenues par diffusion du glucinium dans un acier à 13 % Cr *et dans une austénite* 18/8, *pour différentes durées d'opération et pour différentes températures.*

	2 h. 30 min.		5 h.		10 h.	
Température de chauffage.	Inoxydable 13 % Cr.	Austénite 18/8.	Inoxydable 13 % Cr.	Austénite 18/8.	Inoxydable 13 % Cr.	Austénite 18/8.
800°	0,02	0,05	0,035	0,10	0,04	0,13
900	0,04	0,20	0,10	0,30	0,13	0,43
1000	0,17	0,33	0,27	0,45	0,37	0,67
1100	0,22	0,42	0,32	0,59	0,43	0,83

3° *Dureté superficielle des échantillons cémentés.* — La cémentation par le glucinium peut conférer aux alliages étudiés des duretés superficielles très importantes, résultat en relation certaine avec l'aptitude au durcissement structural des alliages ferritiques ou austénitiques contenant cet élément. La dureté Brinell initiale, qui est voisine de 195 kg/mm² pour

(1) *Comptes rendus*, **199**, 1934, p. 1408, et **204**, 1937, p. 1732.

les deux alliages non traités, s'élève à 642 kg/mm² pour l'acier à 13 % Cr, cémenté à 1000° pendant 10 heures, et à 772 kg/mm² pour l'austénite 18/8, cémenté à 1100° pendant le même temps. Les chiffres du tableau ci-dessous montrent l'augmentation de la dureté superficielle au fur et à mesure qu'on fait croître la température de cémentation.

Dureté Brinell-Vickers en kg/mm² *obtenue par diffusion du glucinium dans un acier à* 13 % Cr *et dans un austénite* 18/8.

(Durée de cémentation : 10 h.)

Température de cémentation.	Force imprimant la pyramide de diamant: 10kg Inoxydable 13 % Cr.	10kg Austénite 18/8.	30kg Inoxydable 13 % Cr.	30kg Austénite 18/8.	50kg Inoxydable 13 % Cr.	50kg Austénite 18/8.
Témoin non cémenté.	–	–	–	–	198	195
600°	232	184	198	182	198	180,5
900	290	334	239	236	221	213
1000	642	474	472	337	421	263
1100	599	772	579	530	511	403
1150	573	690	578	692	577	688

ÉLECTROCHIMIE. — *Sur les conditions d'équilibre des électrodes à sulfates insolubles.* Note [1] de Mlle **Marguerite Quintin**, présentée par M. Paul Pascal.

L'activité des ions SO_4^{--} en solution aqueuse peut être déterminée à partir du potentiel d'une électrode à sulfate insoluble, par exemple SO_4Hg_2 ou SO_4Pb. Mais l'équilibre de ces sels avec l'ion SO_4^{--} peut être affecté par la présence des autres ions de la solution, en particulier des ions H^+ ou OH^-. Il est donc nécessaire de préciser les conditions dans lesquelles ces électrodes conduisent à un résultat sûr.

Dans l'acide sulfurique [2], ou un sulfate acide [3], l'électrode Hg/SO_4Hg_2, à l'air ou sous azote, donne un potentiel parfaitement stable et reproductible. Il n'en est plus de même dans une solution alcaline ; quelles que soient les précautions prises, le potentiel varie constamment en fonction du temps sans jamais atteindre une valeur d'équilibre. Ce fait s'explique, car en solution aqueuse, le sulfate mercureux est fortement hydrolysé suivant

$$SO_4Hg_2 + H_2O \rightleftharpoons SO_4Hg_2,\ Hg_2O,\ H_2O + SO_4H_2$$

---

[1] Séance du 3 mars 1947.

[2] Randall et Langford, *S. Am. Chem. Soc.*, 49, 1927, p. 1445.

[3] Getmann, *J. Phys. Chem.*, 32, 1928 p. 91 ; M. Quintin, *Comptes rendus*, 196, 1933, pp. 473 et 538.

Par conséquent, toute augmentation de la concentration en ions OH^- entraînera un déplacement de l'équilibre, donc une variation du potentiel de l'électrode.

D'autre part, si l'on acidifie une solution d'un sulfate neutre avec de l'acide chlorhydrique, le potentiel de l'électrode Hg/SO_4Hg_2 augmente régulièrement avec la teneur en acide; ceci est dû, non à la variation du pH, mais à la présence des ions Cl^-. Les nombres ci-dessous donnent les valeurs à 17°C. du potentiel $Hg/SO_4Hg_2/(SO_4K_2 + SO_4H_2)\ 0,1\,M + KCl\,C$.

C (mol : gr/l).	E (10⁻⁴ V).	$E'_0(SO_4)$ (10⁻⁴ V).	$(E'_0(Cl)$ (10⁻⁴ V).
0,00	—6690	—6410	–
0,04	—6670	—6390	—5886
0,05	—6665	—6385	—5898
0,06	—6660	—6380	—5976
0,08	—6650	—6370	—6034
0.10	—6642	—6362	—6082

Si le potentiel mesuré était relatif aux ions SO_4^{--}, seul leur coefficient d'activité étant différent d'une solution à l'autre, les variations enregistrées devraient être dans le sens de la variation de la force ionique μ. Or, elles sont en sens inverse. Mais le chlorure mercureux étant plus insoluble que le sulfate, il est logique de penser que l'électrode est en équilibre non avec les ions SO_4^{--} mais avec les ions Cl. On doit alors avoir

$$E = E_0^{(Cl)} = \frac{RT}{F}\log Cf_{Cl} \quad \text{et non} \quad E = E_0^{(SO_4)} + \frac{RT}{2F}\log 0,1\ f_{SO_4}$$

ou

$$E_0'^{(Cl)} = E - \frac{RT}{F}\log C \quad \text{et non} \quad E_0'^{(SO_4)} = E - \frac{RT}{2F}\log 0,1.$$

Si l'on construit la courbe $E_0'^{(Cl)}$ en fonction de $\sqrt{\mu}$, on voit que le sens de la variation est bien celui prévu, et l'extrapolation de $E_0'^{(Cl)}$ pour $\mu = 0$ donne une valeur comprise entre les potentiels normaux $Hg/SO_4\,Hg_2/SO_4^{--}$ et $Hg/Hg_2\,Cl_2/Cl^-$.

Par contre on obtient un potentiel constant en substituant NO_3K à KCl.

Par conséquent, l'électrode Hg/SO_4Hg_2 est inutilisable en milieu alcalin, aussi bien qu'en milieu chlorhydrique.

J'ai cherché si l'électrode amalgame de Pb/SO_4Pb pourrait alors la remplacer. Pour cela j'ai utilisé des solutions de SO_4NaH de concentration constant en SO_4^{--} et dont on faisait varier le pH par addition de KOH. Les potentiels à 22° de $Pb - Hg$ (6 %)/SO_4NaH (0,1 M) + nKOH mesurés sous azote sont donnés ci-dessous.

pH.	E (10⁻⁴ V.).	pH.	E (10⁻⁴ V.).
1,36	2950	4,24	2967
2,42	2961	5,78	2965
2,90	2965	9,82	2962
3,30	2960		

On voit que, sauf pour la solution la plus acide, le potentiel ne varie pas dans de très larges limites de pH ($2 < pH < 10$). Lewis a d'ailleurs déjà indiqué que l'électrode Hg-Pb/SO_4Pb n'était pas stable en milieu très acide. Signalons, en outre, que cette électrode est très sensible à des traces d'oxygène; elle présente plusieurs millivolts d'écart entre une mesure faite à l'air ou sous azote.

En résumé, l'activité des ions SO_4^{--} en solution aqueuse peut être déterminée à l'aide d'une électrode Hg/SO_4Hg_2 si la solution est acide et ne contient pas d'ions Cl^-, ou à l'aide de l'électrode Pb-Hg/SOPb si la solution est alcaline, neutre, ou acide de $pH > 2$.

PÉTROGRAPHIE. — *Sur l'orientation du quartz dans quelques roches métamorphiques des environs de Rochechouart (Haute-Vienne). Application de la méthode de Bruno Sander-Walter Schmidt.* Note [1] de M. **François Kraut.**

J'ai commencé en 1939 l'étude des assemblages structuraux des roches éruptives et métamorphiques de la bordure Ouest du Massif Central en vue d'introduire en France la méthode statistique de Bruno Sander et de Walter Schmidt. Après une longue interruption due à la guerre et à ma captivité, j'ai pu reprendre récemment ces travaux dont on trouvera ici quelques résultats préliminaires.

Dans les roches soumises à une déformation post-cristalline, les éléments exécutent un mouvement conjugué de glissement et de rotation, tant que le frottement intergranulaire est inférieur au module d'élasticité [2]. Lorsque cette limite est dépassée, les grains subissent une déformation, des plans de glissement propres au réseau tendant à s'orienter dans la surface de cisaillement. Dans le quartz, ces translations s'effectuent suivant des plans qui contiennent tous l'axe cristallographique [3]. En déterminant la position des axes optiques du minéral, on obtient des renseignements fort intéressants sur l'histoire mécanique du milieu qui l'englobe

Les roches étudiées dans cette Note sont des plagioclasites quartziques à microcline et micas. Elles renferment du grenat. Direction et pendages ont été repérés sur les échantillons, ce qui permet de replacer les spécimens ainsi que les plaques minces dans la position qu'ils occupaient dans l'affleurement.

L'échantillon n° 1 provient de la Forge de Saillat, au bord de la Gorre (NE de Rochechouart); l'échantillon n° 2 du Moulin du Breuil, à 1^{km} au SE du précédent; le n° 3 a été recueilli 10^{km} plus au S, à la Guimaudie.

---

(1) Séance du 3 mars 1947.

(2) Bruno Sander, *Gefügekunde der Gesteine*, Vienne, 1930.

(3) H. W. Fairbairn, *Structural Petrology* (Revision of "Introduction to Petrofabric Analysis", 1935). Kingston, Canada, 1937.

Les diagrammes 1 et 3 représentent les positions des axes de 250 à 300 cris-

Diagramme 1. Diagramme 2.

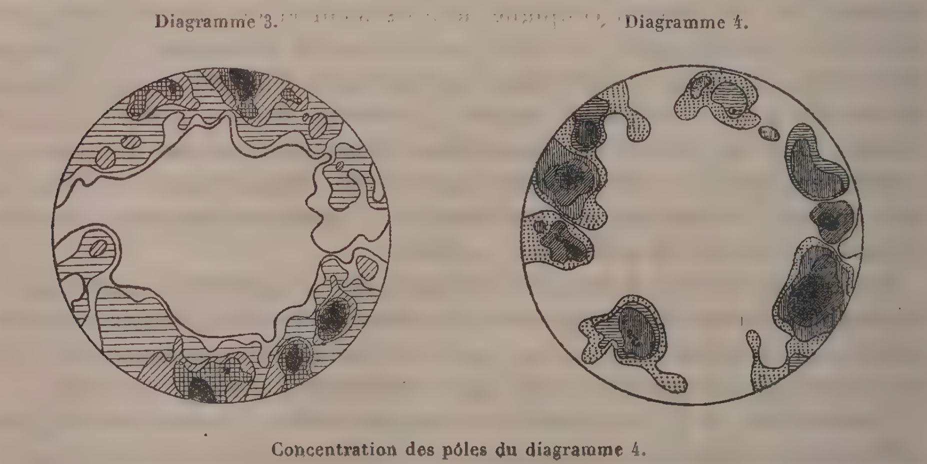
Concentration des pôles des diagrammes 1 à 3.

<0,5 % 0,5-1 % 1-2 % 2-3 % 3-4 %

Aucun pôle ne se place à l'intérieur des surfaces limitées par les courbes fortes.

taux de quartz (déterminés à l'aide de la platine de Fédoroff) dans la

Diagramme 3. Diagramme 4.



Concentration des pôles du diagramme 4.

0 % 0,5-1 % 1-2 % 2-3 %

3-6 % 6-10 % 10-13 % 13-17 %

projection conforme de Schmidt. Les courbes délimitent des aires à l'intérieur

desquelles chaque centième de la surface du canevas renferme le même nombre de pôles d'axes. La répartition de ces pôles est indiquée en pour cent.

Les axes sont concentrés dans une zone limitée de part et d'autre du plan équatorial de la sphère de référence; les maxima se situent à proximité du grand cercle horizontal. Nous avons affaire à des *tectonites à ceinture* ou *tectonites*-B de Sander. On remarquera l'allure très voisine des courbes dans les diagrammes 1 et 3, résultant de conditions mécaniques analogues.

Le diagramme 4 représente un échantillon de plagioclasite prélevé sans orientation au pont de la Gorre, sur la route de Rochechouart à Saint-Junien. Le type à ceinture apparaît ici plus accentué que dans les roches précédentes.

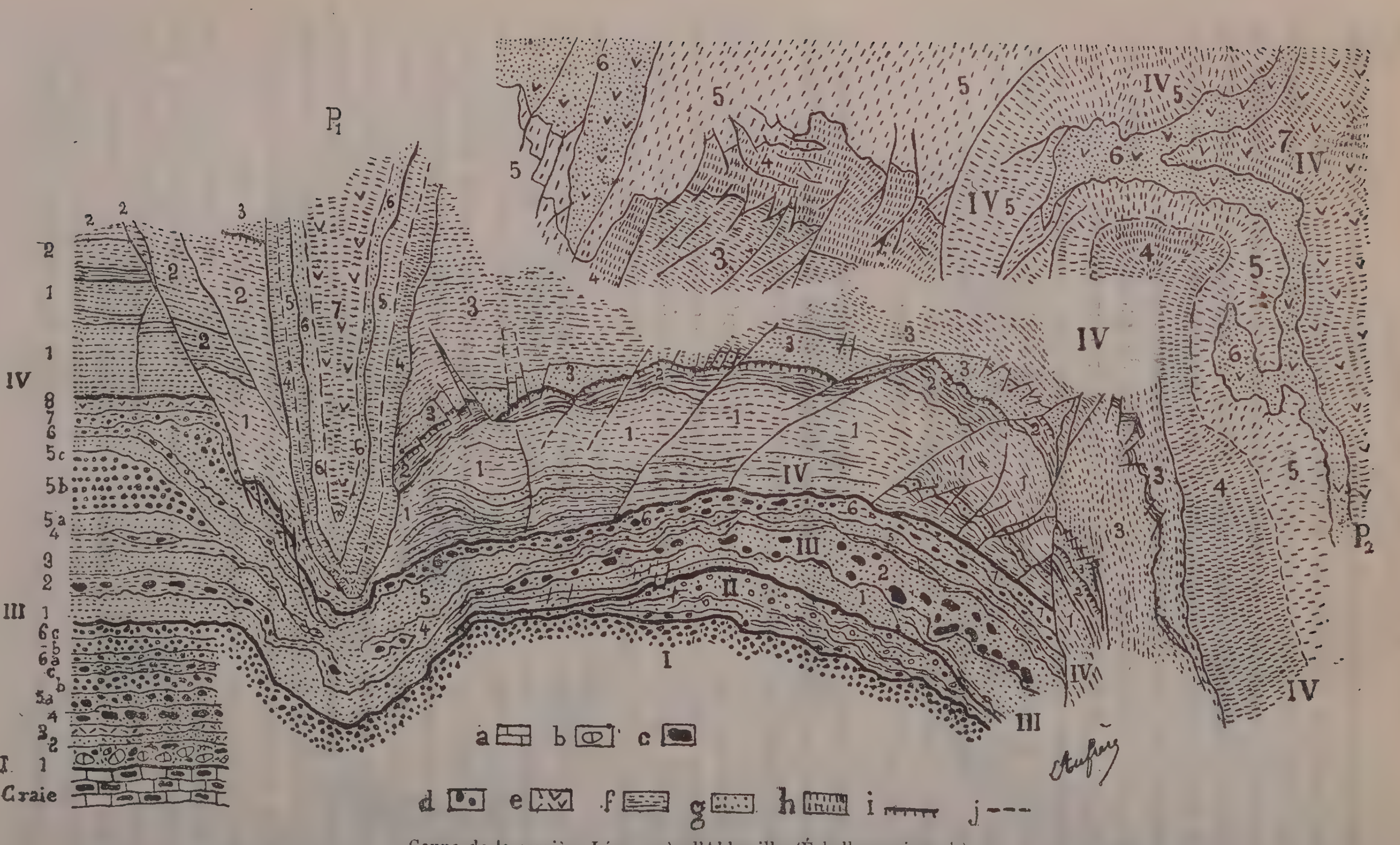
On sait que dans les tectoniques-B, l'axe de la ceinture est presque toujours perpendiculaire aux mouvements tectoniques. Les diagrammes indiquent deux directions de poussée sensiblement perpendiculaires, l'une NE au Breuil et à la Guimaudie, l'autre NW à la Forge. Ajoutons qu'un grand nombre de filons de la région sont orientés suivant ces deux mêmes directions.

GÉOGRAPHIE PHYSIQUE. — *La structure du Quaternaire de la terrasse du Moulin Quignon*. Note de MM. **Henri Breuil, Léon Aufrère** et Mme **Alice Bowler-Kelley**, présentée par M. Emmanuel de Martonne.

En juillet-août 1939, nous avons continué les fouilles commencées l'année précédente et nous avons rouvert la carrière Léon où d'Ault du Mesnil avait signalé une faune à *Elephas meridionalis*, *Rhinoceros etruscus*, *Machairodus latidens*, associée à cette vieille industrie qui, stratigraphiquement et typologiquement, peut servir à définir l'*Abbevillien* de M. l'abbé Breuil ou *Préchelléen* de Commont. Nos observations nous ont permis d'apporter quelques éléments nouveaux dans les dispositions du Quaternaire.

Le caractère original de la coupe est dû à la karstification de la Craie. D'Ault du Mesnil et Commont avaient bien signalé des *poches* où s'étaient affaissés et entassés les dépôts quaternaires. En réalité, ce sont des *puits* verticaux et cylindriques d'une profondeur qu'on peut évaluer à plusieurs dizaines de mètres et situés seulement à quelques mètres les uns des autres. Les couches graveleuses de la base y sont descendues à une très grande profondeur, tandis que les couches limoneuses du sommet ont été infléchies jusqu'à la verticale à travers les couches inférieures et la Craie sous-jacente, où elles forment ce que les ouvriers appellent des *pots de terre*.

La coupe ci-jointe a été levée sur deux paliers disposés suivant un angle aigu dont le sommet se trouve du côté droit de la figure. On y voit deux *pots de terre* déterminés l'un et l'autre par un puits creusé dans la Craie. Le plan de la coupe passe à l'extérieur du puits de gauche P_1, et l'on voit seulement l'inflexion marginale des couches inférieures. Il aurait fallu avancer le front de la carrière pour y voir des ruptures comparables



Coupe de la carrière Léon, près d'Abbeville. (Échelle, environ $\frac{1}{50}$).

a, craie en place; *b*, blocs de craie arrondis; *c*, rognons de silex; *d*, galets de silex; *e*, éclats de silex; *f*, argiles sableuses et sables argileux; *g*, sable rouge; *h*, sable rouge limoneux; *i*, ligne violette; *j*, limite indécise (par glissement ou solifluxion).

à celles qui affectent les couches supérieures. Au contraire, le plan de la coupe passe à l'intérieur du puits de droite P_2, et l'on y voit toutes les couches se terminer par des surfaces de fracture. Celles qui étaient au-dessus du puits sont tombées en profondeur. Dans l'intervalle des deux puits, l'appel au vide à déterminé l'écoulement ou l'écroulement des assises quaternaires, selon leur consistance. La série I, la plus ancienne, est faite de graviers et de sables, c'est-à-dire de couches meubles qui se sont infléchies ou étirées. Il en est de même des couches fortement sableuses de la série III. Mais, dans la série II, un peu argilo-calcaire, on voit déjà, dans ses parties les plus résistantes, de petites surfaces de rupture qui vont se perdre dans les couches meubles voisines. Dans la série IV, ces phénomènes prennent beaucoup plus d'ampleur. Les couches y sont plus ou moins compactes suivant leur teneur en argile et les plus résistantes se sont débitées en blocs que l'humidité rendait plus ou moins plastiques et que la compression déformait au cours de leur déplacement. Là aussi, les surfaces de rupture se perdent dans les couches meubles intercalaires. Ces *ruptures de tassement* donnent à la coupe des dispositions qu'il était nécessaire de reconnaître avant d'en établir la stratigraphie que nous détaillerons dans une Note ultérieure.

EMBRYOGÉNIE VÉGÉTALE. — *Embryogénie des Hydrophyllacées. Développement de l'embryon chez le* Nemophila insignis *Benth.* Note de M. **Pierre Crété**, présentée par M. René Souèges.

Dans une Note récemment parue [1] j'ai établi les lois qui président à l'édification de l'embryon chez une Hydrophyllacée de la tribu des Phacéliées, le *Phacelia tanacetifolia* Benth. Les recherches que je viens d'entreprendre chez un représentant de la tribu des Hydrophyllées, le *Nemophila insignis* Benth., démontrent que, dans cette famille, le mode de développement de l'embryon subit des variations du même ordre que celles qui ont été établies par René Souèges au sujet des Boragacées et des Polémoniacées.

La cellule apicale *ca* du proembryon bicellulaire (*fig.* 1) se divise transversalement pour donner naissance aux éléments d'où dérivent les étages *l* et *l'*; un processus identique fournit les éléments *m* et *ci* à partir de la cellule basale *cb* (*fig.* 2). Dans la tétrade linéaire ainsi obtenue, le cloisonnement transversal de *ci* isole les deux éléments superposés, *n* et *n'* (*fig.* 4).

En *l* et *l'*, des parois verticales cruciales font apparaître deux groupes superposés de quatre octants (*fig.* 4 et 8). Dans les octants qui correspondent à l'étage supérieur *l'*, des cloisons péricIines assurent la formation du dermatogène (*fig.* 11 et 12) et, d'autre part, de cellules centrales où une série de segmentations isolera les cellules-mères des cotylédons et les éléments qui participeront à la construction du cône végétatif de la tige. Dans

(1) *Comptes rendus*, **223**, 1946, p. 459.

les octants qui correspondent à l'étage inférieur *l'*, le dermatogène apparaît selon un processus semblable (*fig.* 9), puis le périblème et le plérome s'identifient, soit après le premier stade de cloisonnement des cellules centrales (*fig.* 11 et 12; à droite), soit après une

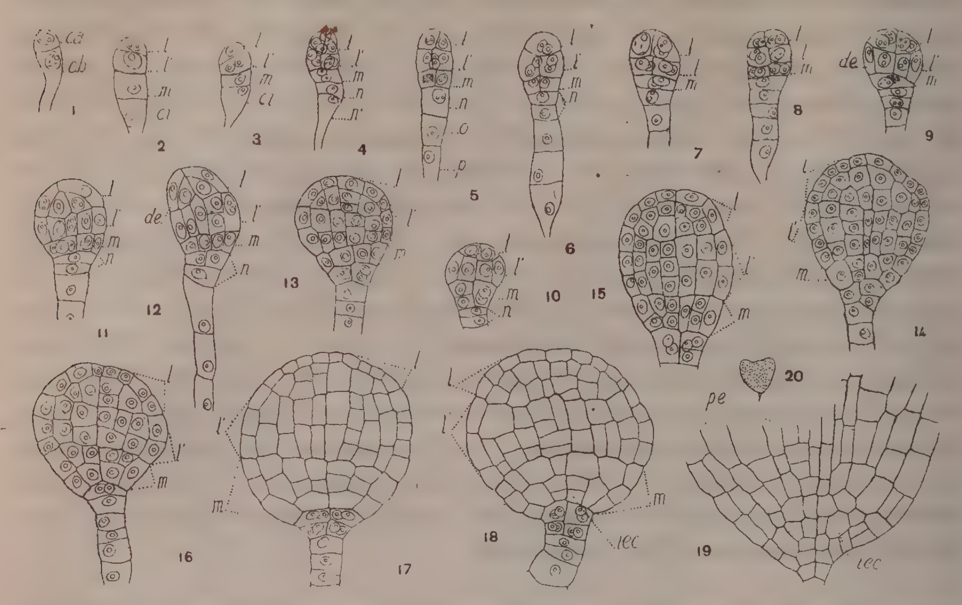


Fig. 1 à 20. — *Nemophila insignis* Benth. — Les principaux termes du développement de l'embryon. *ca* et *cb*, cellule apicale et cellule basale du proembryon bicellulaire; *l*, cellule supérieure de la tétrade ou partie cotylée; *l'*, cellule subterminale de la tétrade ou partie supérieure de l'hypocotyle; *m*, cellule subproximale de la tétrade ou partie inférieure de l'hypocotyle; *ci*, cellule inférieure de la tétrade; *n*, cellule-fille supérieure de *ci* et tissu qui en dérive; *n'*, cellule-fille inférieure de *ci*; *o* et *p*, cellules-filles de *n'*; *de*, dermatogène; *pe*, périblème; *pl*, plérome; *iec*, initiales de l'écorce de la racine. En 20, schéma d'ensemble de l'embryon correspondant au détail de la figure 19. G. : 340; 35 pour la figure 20.

première division transversale de ces derniers éléments (*fig.* 12, à gauche). L'étage *l'* donne naissance à la partie supérieure de l'axe hypocotylé.

A partir de la cellule *m*, il se forme successivement deux, puis quatre éléments, groupés autour de l'axe sur un même niveau (*fig.* 4 à 9), plus rarement superposées (*fig.* 10, à gauche). Dans le cas le plus général, des cloisons périclines isolent des éléments de dermatogène et des cellules centrales. C'est à partir de ces dernières ou de leurs descendantes, que dériveront, par formation de parois horizontales, les initiales du cylindre central et les initiales de l'écorce au sommet radiculaire (*fig.* 14 à 19). Les éléments du dermatogène interviennent plus tard dans la construction des parois externes de la coiffe (*fig.* 19).

La cellule *n* se cloisonne d'abord transversalement (*fig.* 6, 10 et 11) et, dans la cellule-fille supérieure, des parois verticales font apparaître, le plus souvent, quatre éléments juxtaposés (*fig.* 13); ceux-ci, par division transversale, donnent naissance à deux assises superposées (*fig.* 15, 17 et 18). Les cellules de l'assise supérieure constituent les initiales de l'assise calyptrogène; les éléments latéraux de cette assise et l'ensemble de l'assise inférieure contribuent à l'édification des parties externes de la coiffe. La cellule-fille inférieure de *n* ou ses descendantes, ainsi que les éléments produits par *n'*, entrent dans la construction d'un suspenseur *sensu strico*, qui est filamenteux dans son ensemble et se montre composé en général de six à sept éléments.

L'embryon du *Nemophila insignis* vient se ranger dans la série C, sous-série **a** et, par conséquent, appartient au troisième groupe de la première période de la classification embryogénique; il prend place dans le mégarchétype III dans lequel la partie inférieure de l'axe hypocotylé, les initiales du cylindre central et de l'écorce au sommet radiculaire, la coiffe et le suspenseur proviennent de la cellule basale du proembryon bicellulaire. On retrouve, dans le cas qui nous occupe, le mode de développement que R. Souèges a mis en évidence chez l'*Heliotropium peruvianum* L. ([2]). Ces données nouvelles rapprochent les Hydrophyllacées, non plus des Solanacées, comme dans le cas du *Phacelia*, mais des Boragacées. Chez le *Nemophila*, comme chez l'*Heliotropium*, l'embryon se développe selon des lois comparables à celles qui ont été, pour la première fois, établies chez le *Chenopodium Bonus-Henricus* ([3]). Dans le cas présent, le rapprochement se révèle même plus étroit que pour les Boragacées, puisque seule, chez le *Nemophila* comme chez l'Herbe du bon Henri, la cellule-fille supérieure de l'élément *n* entre dans la construction de la coiffe, tandis que c'est l'élément *n* tout entier qui intervient pour remplir ces mêmes fonctions chez les Héliotropes.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Conservation de l'acide ascorbique par une matière colloïdale, la gélose.* Note de M. **Pierre Lecat**, présentée par M. Louis Blaringhem.

La destruction si rapide à l'air et à la lumière de l'acide ascorbique dans les milieux aqueux, non additionnés de quelques conservateurs minéraux comme l'acide trichloracétique, et surtout l'acide métaphosphorique qui, ainsi que l'a montré A. Sosa ([1]), à la dilution de 1/1000, assure une bonne conservation de ce corps, nous a conduit à rechercher le mécanisme de la conservation de la vitamine C dans les organismes vivants chez qui, en plus du renouvellement journalier dû à une synthèse continue (cas des organismes végétaux en période de vie active), il n'est pas douteux qu'une accumulation soit capable de se produire (cas des organismes végétaux au repos et de certains organismes animaux). Le gliode protoplasmique étant avant tout un gel colloïdal, il était intéressant de rechercher si certains colloïdes, ou d'une manière plus générale, l'état colloïdal n'était pas protecteur de la vitamine C. Nos premières recherches ont porté en particulier sur la gélose comme représentant des colloïdes d'origine végétale. Opérant en milieu parfaitement stérile, mais sans aucun antiseptique, le gel, réparti dans des tubes à essais, est additionné de 200$^{\gamma}$

([2]) *Comptes rendus*, 217, 1943, p. 541.

([3]) R. Souèges, *Comptes rendus*, 170, 1920, p. 467; *Bull. Soc. bot. Fr.*, 67, 1920, p. 233.

([1]) *Comptes rendus*, 213, 1941 p. 706; 216, 1943, p. 545.

d'acide ascorbique par centimètre cube. La consistance de la gélose variait de la gelée molle avec 1 % de gélose, jusqu'à une consistance fluide à 0,01 % de colloïde sec. La gélose employée est un produit du commerce, sans purification particulière, de pH 6,5.

Outre l'influence de la concentration, il était également intéressant d'étudier celle des conditions physiques sur la conservation de l'acide ascorbique dans les gels; l'influence de la température fut étudiée par conservation des préparations à la glacière à 0°, et à l'étuve à 32°. Celle de la lumière fut étudiée par exposition à la lumière du jour ou à l'obscurité. Les résultats ont été les suivants : exprimés en pour 100 restant de l'acide ascorbique initial, dosé directement par décoloration de l'indophénol à 0,015 %, de huit jours en huit jours.

Gélose.

Concentration du colloïde.	A la glacière (%), jours.					A l'étuve à 32° (obscurité) (%), jours.				
%	8.	15.	21.	28.	35.	8.	15.	21.	28.	35.
0,01......	68	54	36	18	2	88	68	32	12	0
0,02......	96	82	62	28	0	90	70	32	12	0
0,2	100	74	58	28	2	98	98	78	38	15
1,0	86	80	70	44	6	80	58	44	22	5

Température variable du laboratoire : 12 à 25°.

Concentration du colloïde.	A la lumière (%), jours.					A l'obscurité (%), jours.				
%	8.	15.	21.	28.	35.	8.	15.	21.	28.	35.
0,01......	28	0	–	–	–	60	34	18	4	0
0,01......	36	6	0	–	–	74	62	28	12	0
0,2	98	88	64	32	6	96	86	52	36	4
1,0	38	12	0	0	0	54	44	36	22	4

Conclusions. — 1° La gélose est une bonne conservatrice de l'acide ascorbique; 2° la conservation est fonction de la concentration de l'hydrogel en gélose; 3° l'action destructive de la lumière sur l'acide ascorbique se fait sentir malgré l'état colloïdal du milieu conservateur; mais à la concentration de 0,2 % de gélose, cette action perd beaucoup de son importance; 4° la température n'a que peu d'influence sur la conservation de l'acide ascorbique en milieu gélosé.

ZOOLOGIE. — *Contribution à la connaissance des rosettes vibratiles des Cténophores.* Note de M. **Constantin Dawydoff**, présentée par M. Maurice Caullery.

Les rosettes des Cténophores sont des organes vibratiles paucicellulaires, en entonnoir, enclavés dans la paroi des vaisseaux gastrovasculaires et

munis de deux bouquets de cils, dont l'un, externe, bat dans la mésoglée et l'autre, interne, est plongé dans la lumière du canal cœlentérique, qui, par l'intermédiaire des rosettes, se trouve en communication directe avec le milieu mésogléen environnant. La signification morphologique de ces formations structurales est obscure, leur développement restant jusqu'ici totalement inconnu. Krempf (1920) a fait, sur ce sujet, une observation intéressante ; il a vu, chez le *Cœloplana* adulte, une rosette (bien constituée) à l'état libre et il a interprété son observation en considérant que cette rosette s'*est détachée de la paroi du canal cœlentérique, où elle a pris naissance.* Or, nous allons voir qu'en réalité, c'est l'inverse qui a lieu.

Au cours de mes recherches sur les *Cœloplana* indochinois, j'ai fait, à ce sujet, quelques observations occasionnelles, qui, malgré leur caractère fragmentaire, pourraient jeter quelque lumière sur le problème qui nous occupe. Ces observations ont été faites sur un individu très jeune de *Cœloplana agniæ* Daw., ayant à peine accompli sa planarisation. En soumettant ce *Cœloplana* à l'analyse microscopique, j'ai constaté la présence, dans sa mésoglée, à côté de rosettes vibratiles normales, de quelques rosettes parfaitement indépendantes des parois des vaisseaux méridiens et égarées dans l'épaisseur du parenchyme environnant. Malgré le nombre peu considérable de ces rosettes à l'état libre, leur allure morphologiquement incomplète me fait croire que le phénomène que j'ai observé ne pourrait être interprété comme une simple anomalie accidentelle. J'incline à admettre que j'ai eu devant moi les ébauches des rosettes aux divers stades de leur développement. Malheureusement, je n'ai pas réussi à suivre cette évolution, étape par étape, en l'étudiant sur un seul individu et surtout vu les difficultés que présentent le discernement et l'identification des premières ébauches des formations en question, ébauches qui, sans doute, sont initialement monocellulaires, parmi les nombreux éléments mésenchymateux inclus dans la masse mésogléenne. Tout ce que je peux affirmer c'est que, sur les stades où ces ébauches prennent une allure assez évoluée pour permettre d'y reconnaître avec certitude les rosettes en voie de formation, ces dernières se présentent comme des urnes minuscules, paucicellulaires. Chaque urne portait, à chacune de ses extrémités, un bouquet de longs cils : le bouquet externe (agglutiné en une véritable flamme vibratile couronnant l'extrémité postérieure rétrécie de l'organe) et le bouquet interne, localisé dans la partie supérieure de l'urne élargie en entonnoir et dont l'ensemble ciliaire, disposé en cercle, est tourné vers la profondeur de l'urne. Le fond de l'urne ainsi constituée est encore apparemment dépourvu de l'orifice réglementaire.

Le stade que nous venons de décrire est le stade qui précède la fixation de l'organe au canal gastrovasculaire. J'ai trouvé deux urnes libres, qui, apparemment, étaient près d'adhérer à la paroi du vaisseau méridien.

Or, dans un de ces cas, l'épithélium de ce dernier, au moment de sa mise en contact avec l'urne vibratile, montrait une tendance à s'agencer autour de lui, en une sorte d'entonnoir. Dans le deuxième cas, l'ébauche de cet entonnoir était déjà indiquée, avant même que le contact de l'urne avec la paroi du vaisseau méridien fût réalisé.

En résumé, j'arrive à la conclusion que les rosettes des Cténophores sont des formations *morphologiques indépendantes de la paroi du système gastrovasculaire* qui ne s'associent à ce dernier que secondairement et que les formations en question sont d'origine, non pas endodermique, mais ectodermique, provenant probablement des éléments du mésenchyme (ectomésoderme).

Si mes observations se confirment, elles donneront un appui solide à l'opinion ancienne, mais depuis longtemps abandonnée, qui voit, dans les rosettes de Cténaires, un véritable appareil néphridien, qui, prenant son origine aux dépens de l'ectoderme primaire, s'ouvre au dehors, non pas par intermédiaire du tégument, mais en s'associant à la paroi endodermique du système gastrovasculaire.

BIOLOGIE. — *Sur les plans de croissance du Cobaye et du Lapin.* Note de M. **Marcel Abeloos**, présentée par M. Maurice Caullery.

L'étude de la croissance relative des divers organes en fonction du poids du corps a été poursuivie chez le Cobaye et le Lapin domestique au cours de la vie fœtale et de la croissance post-embryonnaire. Trois stades critiques, définis par des variations brusques et simultanées du régime de croissance relative de plusieurs organes, ont pu être mis en évidence; ils offrent des caractères analogues dans les deux espèces et doivent vraisemblablement être considérés comme physiologiquement homologues.

1° Un premier stade critique se situe durant la vie fœtale, pour un poids de 10^g environ dans les deux espèces, correspondant, chez le Lapin dont la gestation dure un mois, à un fœtus de trois semaines et, chez le Cobaye, dont la gestation dure deux mois, à un fœtus de 40 jours. Il est marqué par un abaissement très net du taux d'allométrie (*hétérauxèse*) α pour quatre organes au moins : le foie, les poumons, les reins, le globe oculaire.

D'après les observations histologiques de M. Aron [1], ce stade coïncide assez exactement avec la première apparition des îlots de Langerhans dans le pancréas et l'établissement de la fonction glycogénique du foie, c'est-à-dire avec l'avènement de la phase hormonale de la vie. Il est à noter que cet avènement est accompagné, chez les fœtus de Veau et de

---

[1] *Bull. Biol. France Belgique*, 65, 1931.

Mouton [2], de variations de même sens des taux allométriques des mêmes organes. Cette étape importante de la physiogénèse des Mammifères paraît donc offrir dans toutes les espèces des caractéristiques biométriques communes.

D'après les données de Chaine sur la croissance fœtale du Lapin et celles de Draper pour le Cobaye, ce premier stade critique hormonal correspondrait, chez le Cobaye, à un abaissement net du taux de la croissance globale en fonction du temps, tandis qu'il ne se traduit, chez le Lapin, par aucun accident de la courbe de croissance.

2° Le second stade critique, marqué essentiellement par un abaissement du coefficient allométrique (α) de l'encéphale, coïncide avec la naissance chez le Cobaye, mais se situe environ 10 jours après chez le Lapin. Il est homologue du stade critique de l'encéphale que l'on observe chez tous les Mammifères que j'ai pu étudier de ce point de vue et qui se situe suivant les espèces, soit à la naissance (Ruminants, Porc), soit peu après (Homme, Chat, Chien, Rat). Chez le Cobaye comme chez le Lapin, il s'accompagne d'un relèvement du taux allométrique pour le foie, d'une diminution de ce taux pour la peau et d'un nouveau changement du régime de croissance relative des reins.

La phase de la croissance comprise entre les deux premiers stades critiques, que l'on peut appeler phase embryonnaire hormonale, multiplie le poids par 15 chez le Lapin, par 6 seulement chez le Cobaye. Cette inégalité est à l'origine de la différence de taille spécifique entre les adultes.

3° Le troisième stade critique, commun aux deux espèces, correspond à la puberté, qui, chez le Lapin [3] comme chez le Cobaye, coïncide, de façon inattendue, avec un relèvement des taux de croissance allométrique pour la peau et pour les poumons.

La parenté entre les deux espèces se manifeste donc par des analogies frappantes en ce qui concerne le plan ontogénétique général des corrélations de croissance.

La comparaison détaillée des coefficients allométriques (α et K) des divers organes, aux phases correspondantes du développement, révèle, entre les deux espèces, certaines identités. Dans certains cas, les différences spécifiques portent seulement sur le coefficient K, en relation avec la taille initiale des ébauches des organes, et non sur le coefficient α, qui caractérise le mécanisme des corrélations de croissance entre organes. Les organes dont le comportement au cours de la croissance accuse le plus de divergences sont les glandes endocrines, surrénales et thyroïde.

---

(2) M. Abeloos, *Comptes rendus*, **222**, 1946, p. 342.

(3) A. Limousin, *ibid.*, **223**, 1946, p. 211.

BIOLOGIE, — *Rôle du facteur hygrométrique dans l'écologie et la biologie des Insectes xylophages*. Note de M. **A. Kh. Iablokoff**, présentée par M. Maurice Caullery.

Si, depuis longtemps, on a constaté l'importance qu'il convenait d'attribuer au facteur hygrométrique dans la biologie des stades larvaires et nymphaux de bien des xylophages, on a trop négligé l'action prépondérante de ce facteur sur l'écologie de ces mêmes insectes après leur éclosion.

Ainsi, on a souvent observé des xylophages hygrophiles et, en particulier, des *Cerambycidæ*, qui normalement ne se rencontrent sur les fleurs que par temps humide et qui, par temps sec, se plaquent en plein soleil, sur les arbres morts sur pied, les planches fraîchement sciées, etc. Cette observation est valable aussi bien pour les ♂ que pour les ♀ ; il ne s'agit donc pas uniquement d'un phénomène en corrélation avec la ponte. Ainsi ces xylophages ne butinent que par temps humide, et, par temps sec, restent sur les arbres morts. Pour quelle raison ? Nous avons tenté d'analyser le problème dans le courant de l'été 1946.

La solution est simple si nous abordons le phénomène du point de vue théorique, en considérant la structure de la fibre cellulosique et l'équilibre hygrométrique du bois dans une atmosphère d'humidité relative déterminée.

La théorie micellaire de Naegeli et Ludtke rend bien compte de la structure du bois, et, d'autre part, confirme l'allure particulière, en deux temps, de sa courbe d'inhibition, avec point critique de saturation pour un poids d'eau atteignant 25 à 35 % (suivant les essences) du poids de bois sec.

En ce qui concerne l'équilibre hygroscopique du bois et de l'atmosphère, un diagramme, établi depuis quelque temps, permet de calculer l'humidité du bois en fonction de la température et de l'humidité atmosphérique. Mais comme, dans nos régions, l'humidité d'un bois sec ne descend pas au-dessous de 15 %, l'arbre mort sur pied devient un volant hygrométrique à forte inertie, et, par temps de sécheresse, évapore des quantités importantes d'eau, ce qui permet la constitution de manchons d'air humide autour des troncs. Par temps humide, l'arbre, par contre, réabsorbe de l'eau sous forme de vapeur, les molécules d'eau pénétrant peu à peu jusqu'au cœur de l'arbre.

Ainsi s'établit un véritable rythme hygroscopique, basé sur l'échange de la vapeur d'eau entre l'arbre mort et le milieu environnant, rythme variable suivant les saisons et venant se superposer au rythme journalier correspondant.

Nous prendrons comme exemple les mesures effectuées en forêt de Fontainebleau (gorges de Franchard), le 14 avril 1946 à $12^h,30^m$ (heure solaire), sur un chêne mort sur pied

depuis environ trois ans. L'humidité relative de l'atmosphère était de 56 % au niveau du sol, et de 48 % à 1m,5, à l'ombre, et de 37 % au soleil. La température de l'air était de 21° au thermomètre fronde, celle du bois, au soleil, était de 35°. Le diagramme nous montre immédiatement que : pour 21° et 48 % atmosphériques, l'humidité du bois sera de 9 % en cas d'équilibre; pour 35° et 37 % atmosphériques, l'humidité du bois sera de 6,8 % en cas d'équilibre.

Or, le bois de ce chêne en contenait 22 %. Une intense évaporation modifiait donc continuellement l'humidité de l'air ambiant, et même si des souffles d'air arrivaient à rompre l'état d'équilibre hygrostatique, au voisinage du tronc, sous les écorces déhiscentes, lieu préféré des insectes hygrophiles, un matelas d'air humide restait immobile. L'humidité de l'air au voisinage immédiat du tronc nous est donnée également par le diagramme : pour 21° de l'air et 22 % d'humidité du bois, nous obtenons une humidité relative atmosphérique de 91 %; pour 35° de l'air et 22 % du bois, nous obtenons une humidité relative atmosphérique de 92 %. Les mesures sur le terrain ont confirmé ces calculs.

Cette humidité élevée ne se rencontre que contre le tronc de l'arbre, dans un étroit manchon d'air humide. La courbe de la variation hygrométrique a une allure logarithmique et la zone perturbée par la vapeur dégagée par l'arbre mort s'étend sur environ 10mm côté soleil et 20mm côté ombre. Ce manchon humide suffit aux insectes xylophages hygrophiles pour trouver une humidité convenable.

En ce qui concerne les galeries larvaires et les logettes nymphales, une remarque analogue s'impose. En effet, les téguments larvaires et nymphaux ne protègent que très mal contre la sécheresse et les larves, ainsi que les nymphes, surtout au moment de l'éclosion, exigent une humidité atmosphérique élevée. Si nous nous reportons encore une fois au diagramme, et si nous admettons que les limites extrêmes de la température du bois puissent être 0° et 30°, que l'humidité du bois reste aux environs de 15 % pendant la vie larvaire active, nous obtiendrons, pour l'humidité de l'air de la logette, des valeurs oscillant entre 74 et 77 %, c'est-à-dire une humidité élevée et stable. Notons, que, normalement, l'humidité des bois attaqués par les xylophages dépasse largement 15 %, voisinant souvent 20 et même 25 %.

Ainsi, nous pensons avoir démontré toute l'importance qu'il convient d'attribuer au facteur hygrométrique dans la biologie larvaire et l'écologie des adultes; même dans les cas, où, en apparence, ce facteur semble ne pas intervenir, il peut être de la plus grande importance, et dominer toute la vie de l'insecte.

BIOLOGIE EXPÉRIMENTALE. — *Le rôle du complexe hypothalamo-hypophysaire dans la régulation centrale de l'appétit glucidique.* Note de M. **André Soulairac**, présentée par M. Maurice Caullery.

Le pancréas insulaire, le cortex surrénal et la thyroïde possèdent une action très nette sur la consommation spontanée de différents glucides

chez le Rat. L'action de l'hypophyse antérieure, expérimentalement très caractéristique, est plus complexe.

On constate que l'hypophysectomie diminue l'appétit glucidique. Mais, lorsqu'on injecte à l'animal normal des doses relativement importantes d'extrait anté-hypophysaire total ou d'extrait anté-hypophysaire thyréotrope, on s'aperçoit qu'il se produit également une très forte diminution de la consommation des sucres. Il semble donc que l'anté-hypophyse seule ne peut pas être considérée comme l'organe régulateur central de l'appétit glucidique.

La possibilité d'un contrôle nerveux de l'activité hypophysaire me fut suggérée par les résultats de A. W. Hetherington et S. W. Ranson (1) et de J. R. Brobeck, J. Teppermann et C. N. H. Long (2). Après lésions expérimentales de l'hypothalamus, ces auteurs constatèrent que les Rats présentaient, entre autres symptômes, des modifications quantitatives importantes de l'appétit. Ils ne mirent cependant, en évidence, aucune modification qualitative.

J'ai repris les expériences de lésions hypothalamiques chez le Rat, dans le but d'étudier le rôle possible de l'hypothalamus dans la régulation même de l'appétit glucidique.

J'ai constaté que des lésions destructives de l'hypothalamus antérieur provoquent une augmentation considérable de l'appétit du Rat pour le glucose. Cette augmentation est élective, car les animaux qui ont la possibilité de choix entre glucose et alimentation standard (à base de céréales) ne modifient que comparativement peu leur consommation de nourriture ordinaire.

Le contrôle histologique des lésions m'a montré que, pour être très efficaces, celles-ci doivent être situées dans l'hypothalamus antérieur, être bilatérales et intéresser particulièrement les noyaux paraventriculaires, médio-ventraux et, parfois, l'éminence médiane.

Outre cette action sur l'appétit des sucres, la lésion hypothalamique augmente l'absorption intestinale du glucose. Chez le Rat normal, cette absorption atteint le taux moyen de 200^{mg} par heure et par 100^{g} de poids. Après lésions de l'hypothalamus, elle se produit au taux moyen de 331^{mg}. Des expériences antérieures m'avaient montré que l'hypophysectomie et l'administration d'extrait anté-hypophysaire diminuaient l'absorption du glucose aux taux respectifs de 132^{mg} et de 147^{mg}, faits en apparence contradictoires, mais qui s'expliquent à la lumière du fonctionnement hypothalamique.

---

(1) *The spontaneous activity and food intake of rats with hypothalamic lesions* (*Am. J. Physiol.*, **136**, 1942, pp. 609-17).

(2) *Experimental hypothalamic hyperphagia in the albino rat* (*Yale J. Biol. Med.*, **15**, 1943, pp. 831-53).

Ces expériences montrent que l'hypothalamus possède une action sur la régulation de l'appétit glucidique. D'autre part, il semble bien qu'il y ait antagonisme entre l'action de l'hypothalamus et celle de l'anté-hypophyse dans cette même régulation.

Ces faits permettent de comprendre l'effet apparemment paradoxal de l'extrait anté-hypophysaire et indiquent, en outre, que, *dans le contrôle central de la régulation de l'appétit glucidique, il existe une synergie fonctionnelle entre l'hypothalamus et l'hypophyse.* C'est l'ensemble hypothalamo-hypophysaire qui assure cette régulation neuro-endocrinienne.

Deux phénomènes expérimentaux simples permettent d'interpréter le mécanisme de cette régulation centrale : 1° l'hypophysectomie diminue la consommation glucidique et l'absorption intestinale; 2° la destruction des noyaux hypothalamiques antérieurs augmente la consommation et l'absorption intestinale.

L'hypothalamus aurait un rôle inhibiteur et l'hypophyse un rôle excitateur. On sait, d'autre part, que si l'hypothalamus tient l'hypophyse sous sa dépendance, par l'intermédiaire de filets nerveux, l'hypophyse, à son tour, possède une action incontestable sur le fonctionnement hypothalamique, par l'intermédiaire de phénomènes de neurocrinie colloïde directe et indirecte. L'action apparemment paradoxale de l'extrait anté-hypophysaire peut ainsi être expliquée : l'anté-hypophyse en excès, chez l'animal normal, agit sur les centres hypothalamiques en les excitant et produit ainsi secondairement une action physiologique à prédominance hypothalamique. C'est la résultante de ces actions qui est constatée par la diminution de l'appétit pour les glucides.

En outre, le retentissement hypophysaire d'une lésion hypothalamique est également mise en évidence par des modifications histologiques de l'anté-hypophyse.

A l'état normal, l'appétit glucidique est donc principalement réglé par le bon équilibre de ces deux formations antagonistes. Si l'on vient à perturber expérimentalement un des deux systèmes, l'autre devient immédiatement prédominant.

Le rôle de l'hypothalamus serait donc un rôle de modérateur de l'activité hypophysaire, du moins en ce qui concerne le déclenchement de l'activité endocrinienne qui règle les mécanismes de l'appétit pour les glucides.

L'existence d'une régulation neuro-endocrinienne centrale de l'appétit glucidique permet de mieux comprendre les processus complexes de la régulation d'un tel comportement. Elle permet, en particulier, d'interpréter et de situer les variations sensorielles périphériques, au niveau des organes olfacto-gustatifs, que provoquent certaines perturbations endocriniennes. La modification endocrinienne retentit sur l'hypothalamus,

qui, par les connexions hypothalamo-rhinencéphaliques, agit à son tour sur les centres rhinencéphaliques.

Réciproquement, à la lumière de ces faits, il est possible de comprendre comment des stimuli olfacto-gustatifs périphériques peuvent intervenir dans la régulation des mécanismes physiologiques de l'appétit.

ÉVOLUTION. — *Le rajeunissement des lignées évolutives et les migrations.* Note de M. **Albert Vandel**, présentée par M. Maurice Caullery.

Les zoologistes ont rassemblé, depuis plus d'un siècle, un nombre immense de documents relatifs à l'anatomie, à la systématique, à la distribution géographique et à l'histoire paléontologique des différents embranchements du règne animal. Il est possible de saisir, à la lumière de ces données, certains aspects de la marche réelle de l'évolution du monde animal. Le déroulement de l'évolution nous apparaît aujourd'hui comme un processus essentiellement irrégulier et discontinu. A des époques d'épanouissement succèdent de longues périodes de stagnation (*épistase* d'Eimer), ou de régression.

L'aspect le plus aisé à mettre en évidence dans l'évolution est celui de ses cheminements régressifs. L'étude de la plupart des groupes actuels prouve que leur organisation est simplifiée, régressée, par rapport à celle des organismes qui les ont précédés. De ses magnifiques recherches sur les Araignées de l'Ambre, Petrunkewitch [1] conclut que la structure des Araignées actuelles est, à maints égards, simplifiée et réduite par rapport à celle de leurs ancêtres tertiaires. L'examen de plusieurs autres groupes d'Arachnides (Palpigrades, Acariens, etc.) conduirait à des résultats de même ordre. Nous-même [2] étions arrivé à des conclusions analogues, au terme d'une longue étude consacrée aux Crustacés Isopodes. A. Lwoff [3] a développé, dans un remarquable ouvrage de synthèse, l'idée que l'évolution des microorganismes est essentiellement caractérisée par une perte de fonctions.

On ne saurait cependant douter que cet aspect régressif de l'évolution ne représente que la contre-partie de phases d'épanouissement et de diversification.

L'étude des Crustacés Isopodes terrestres révèle l'existence de telles périodes d'épanouissement, qui représentent de véritables *rajeunissements évolutifs* du phylum. Ces moments privilégiés coïncident presque toujours avec des migrations et la colonisation par le phylum de milieux neufs et jusque-là inoccupés par des représentants du même goupe. En voici quelques exemples.

---

(1) *Trans. Connect. Acad. Arts Sc.*, **34**, 1942, pp. 119-464.

(2) *Bull. biol. France-Belgique, Suppl.*, **30**, 1943.

(3) *L'Évolution physiologique* (*Act. sc. industr.*, **970**, 1943).

La famille des *Trichoniscidæ* est originaire de l'hémisphère austral (continent de Gondwana), ainsi que nous l'avons démontré dans un Mémoire précédent ([1]). A travers l'Afrique, ses représentants ont gagné l'Europe, au début du tertiaire. Ils ont colonisé toute la région méditerranéenne, puis, après sa surrection, la chaîne alpine. Dans ces nouveaux milieux, ils ont subi une diversification extrême, qui a eu pour résultat de donner aux régions méridionales de l'Europe la plus riche faune de *Trichoniscidæ* que nous connaissions actuellement. Cette diversification évolutive s'est principalement exercée sur les caractères sexuels, mais elle a engendré également des structures entièrement nouvelles, telles que les dispositifs permettant l'enroulement (*volvation*), caractéristiques d'une lignée de *Trichoniscidæ* pour laquelle Verhoeff a créé la famille des *Buddelundiellidæ*.

Les Porcellionides bitrachéates, dont la différenciation s'est réalisée en Afrique orientale, ont donné naissance, lorsqu'ils sont parvenus en Europe, à un nombre considérable d'espèces. Mais, en plus de ces phénomènes de *microévolution*, nous savons que les Porcellionides bitrachéates ont engendré la famille des *Armadillidiidæ*, formes volvationnelles qui constituent les représentants les plus nombreux et les plus diversifiés des Oniscoïdes méditerranéens. Cette filiation n'est pas hypothétique, car les stades de passage entre les *Porcellionidæ bitracheatæ* et les *Armadillididiidæ* ont persisté jusqu'à nous (*Typhlarmadillidium* Verh. = *Eleoniscus* Rac.).

Un très bel exemple de rajeunissement évolutif corrélatif d'une migration est offert par le genre *Cylisticus* Schnit. Ce genre reconnaît, comme tous les Porcellionides quinquétrachéates, une origine orientale; il a pris naissance dans les régions steppiques de l'Asie occidentale et de l'Europe orientale. Au Miocène, après la surrection de la chaîne des Apennins, le genre *Cylisticus* a gagné l'Italie et les régions avoisinantes (Corse, Sardaigne, Elbe, midi de la France, Catalogne), où il a subi un nouvel épanouissement évolutif qui se traduit, du point de vue systématique, par la genèse de quinze espèces distinctes. Ces exemples pourraient être multipliés.

Il convient de préciser le rôle que la migration et la colonisation de territoires neufs ont pu jouer dans les phénomènes de rajeunissement évolutif. Ce serait une erreur d'attribuer à ces événements une action proprement modelante. Ils représentent bien plutôt un *facteur stimulant*, capable de réveiller les possibilités évolutives du phylum. On ne saurait comprendre autrement les remarquables parallélismes et les réalisations convergentes (*Homoeogenèse* d'Eimer) que l'on relève entre les formes européennes et leurs lointains parents des terres gondwaniennes. C'est

---

([1]) *Bull. biol. France-Belgique*, 79, 1946, pp. 221-272.

ainsi que les formes enroulables apparues dans l'hémisphère austral (*Tylidæ, Armadillidæ*) ont été très exactement reproduites, à quelques détails près, par les types volvationnels apparus bien plus tard en Europe (*Buddelundiellidæ, Armadillidiidæ*). Tout zoologiste sait combien est aisée la confusion entre les deux espèces volvationnelles les plus communes dans la région méditerranéenne : *Armadillo officinalis* Dum. et *Armadillidium vulgare* (Latr.). Cette ressemblance est cependant le résultat d'évolutions entièrement distinctes, qui se sont déroulées sur des continents antipodes.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Sur un bilan des transformations de l'éthanal ajouté à une fermentation alcoolique.* Note de MM. **Louis Genevois, Émile Peynaud et Jean Ribereau-Gayon**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Nous avons récemment admis ([1]) que dans une fermentation alcoolique normale, l'acide acétique, le butylèneglycol et l'acide succinique étaient des produits de condensation de l'éthanal, dérivant lui-même de l'acide pyruvique.

Nous avons cherché à vérifier cette hypothèse en ajoutant de l'éthanal progressivement à une fermentation alcoolique; en ajoutant brutalement une quantité de l'ordre du gramme d'éthanal par litre de milieu, on paralyse la fermentation; en l'ajoutant de l'ordre de 2^{dg} chaque jour, la fermentation suit son cours normal, on arrive ainsi, en 10 jours, à introduire $2^{\text{g}},2$ d'aldéhyde (50 millimolécules) dans une fermentation portant sur 190^{g} de sucre réducteur par litre à pH 3,17 (jus de raisin).

Il est possible d'établir un bilan approché des transformations de l'éthanal ajouté. On compare dans ce but à la fermentation recevant de l'éthanal, une fermentation témoin. Dans la fermentation modifiée, on trouve un surplus Δa d'acide acétique, Δb de butylèneglycol ([2]), Δm d'acétylméthylcarbinol, Δs d'acide succinique correspondant à l'éthanal Δh ajouté.

Rappelons les équations de bilan admises dans notre précédente Note, qui sont, pour

L'acide acétique a : $2\,CH_3CHO + H_2O = CH_3CO_2H + CH_3CH_2OH$; le butylèneglycol b : $CH_3CHO + CH_3CH_2OH = CH_3CHOHCHOHCH_3$; l'acétylméthylcarbinol m : $2\,CH_3CHO = CH_3CHOHCOCH_3$; l'acide succinique s : $5\,CH_3CHO + 2\,H_2O = CO_2HCH_2CH_2CO_2H + 3\,CH_3CH_2OH$.

Il en résulte l'équation suivante pour le bilan partiel :

$$\Delta h = 2\,\Delta a + \Delta b + 2\,\Delta m + 5\,\Delta s = \Sigma\Delta.$$

L'expérience montre que le $\Sigma\Delta$ ainsi calculé est inférieur au Δh, ce qui signifie

---

([1]) *Comptes rendus*, **223**, 1946, p. 693.

([2]) Dosé selon E. Peynaud (*Bull. Soc. Chim.*, 1946, p. 685).

que l'acétaldéhyde, en plus des réactions indiquées, donne d'autres réactions dont les produits ne sont pas dosés. Il importe de remarquer que, sous l'action de l'éthanal (1 % du poids du sucre), le butylèneglycol triple sensiblement, l'acétylméthylcarbinol devient important dans le cas d'une levure peu anaérobie (levure de boulangerie), l'acide succinique peut plus que doubler ; ce dernier fait n'avait jamais été signalé, et tend à confirmer que l'acide succinique provient bien des produits de dégradation du sucre, comme l'affirmait Pasteur dès 1859 ([3]).

Voici les concentrations A d'alcool, *r* de sucre restant, *g* de glycérol, *h* d'éthanal, *a* d'acide acétique, *b* de butylèneglycol, *m* d'acétylméthylcarbinol, *s* d'acide succinique, en millimolécules pour 10 litres (sauf pour l'alcool) dans deux fermentations ayant duré 21 jours à 25° (jus de raisin à 190^g de sucre au litre, pH = 3,17).

	A.	*r.*	*g.*	*h.*	*a.*	*b.*	*m.*	*s.*
				Levure de Pomerol.				
Témoin........	11°,0	100	570	8	92	34	0,2	33
+502 éthanal...	**11°,2**	**85**	**500**	**69**	**144**	**93**	**0,3**	**73**
Δ..............	+0°,2	−15	−70	+61	+52	+59	+0,1	+40
				Levure de boulanger.				
Témoin........	10°,8	320	580	8	37	42	0,6	51
+502 éthanal...	**11°,0**	**344**	**510**	**28**	**109**	**119**	**10,3**	**84**
Δ..............	+0°,2	+24	−70	+20	+72	+77	+10	+33

Pour la levure de Pomerol.............. $\frac{\Sigma\Delta}{\Delta h} = \frac{363}{441} = 0,80$

Pour la levure de boulanger............. $\frac{\Sigma\Delta}{\Delta h} = \frac{406}{482} = 0,85$

A 16^h l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16^{h}15^m.

A. Lx.

([3]) *Comptes rendus*, 48, 1859, p. 1149; *Annales de Chimie et de Physique*, 58, 1860, p. 343.

ERRATA.

—

(Séance du 3 février 1947.)

Note de MM. *J. Bougault* et *P. Chabrier*, Sur quelques réactions de l'acide benzoylacrylique :

Table des matières, page 395, *au lieu de* M. J. Bouganet, *lire* M. J. Bougault.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus pendant les séances de décembre 1946.

Éléments de thermodynamique et physicochimie de la combustion dans les moteurs, par Max Serruys. Paris, Dunod, 1945; 1 vol. 25cm (présenté par M. A. Caquot).

La suspension et la direction des véhicules routiers, par Max Serruys. Paris, Dunod, 1947; 1 vol. 25cm (présenté par M. A Caquot).

Les engrais phosphatés, par Adrien-André Sanfourche. Paris, Dunod, 1947; 1 vol. 25cm,5.

Les mètres prototypes du Bureau international. Notes historiques. Rénovation. Étude, par Albert Pérard et Charles Volet. Extrait du Tome XXI des *Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures*. Paris, Gauthier-Villars, 1945; 1 vol. 33cm.

Que sais-je? Les fruits coloniaux, par Auguste Chevalier et Jean Leroy. Paris, Presses universitaires de France, 1946; 1 vol. 17cm,5.

Collection Lebègue. — Morale de Savants d'Hippocrate à Einstein. Pages choisies, par Jean Pelseneer. Bruxelles, Office de publicité S. C., 1946; 1 vol. 19cm,5.

Contribution à la connaissance de la Géologie de l'U. R. S. S., publié par la Société des Naturalistes de Moscou. Nouvelle série. Livre 3(7). *Contributions à la lithologie*, par A. L. Yauschine. Moscou, 1946; 1 vol. 21cm (en langue russe).

History and National Life, par Jean Bruchési. Extrait de *Culture*. Québec, 1946; 1 fasc. 23cm,5.

Morphology and Composition of Some Soils of the Miami Family and the Miami Catena, par Irvin C. Brown et James Thorp, in *Technical Bulletin*, n° 834, 1942. Washington, D. C., United States Department of Agriculture, 1 fasc. 23cm.

A Collection of Fishes obtained in the Rice Kin Islands by *Captain Ernest R. Tinkham A. U. S.*, par Henry W. Fowler, in *Proceedings of the Academy of natural Sciences of Philadelphia*. Vol. XCVIII, 1946; 2 fasc. 27cm,5.

Nutritional Charts for medical and other specialists. Twelfth edition, publié par le Research Department of H. J. Heinz Company. Pittsburgh 12, P. A. 1 vol. 30 × 22cm,5.

Un ou une sulfamide? par Marcel Delépine. Extrait du *Bulletin de l'Académie de Médecine*, 1945; 1 feuille 24cm.